УДК 550.83

Е. Вдовина, ст. наук. співроб.

О ВЛИЯНИИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ НА ГРАВИТАЦИОННОЕ ПОЛЕ МАССЫ

(Рекомендовано членом редакційної колегії д-ром фіз.-мат. наук, проф. М.А. Якимчуком)

Запропоновано систему диференціальних рівнянь статичного (гравітаційного, електричного, магнітного) полів в неоднорідних суцільних середовищах. Система дозволяє отримати нові розв'язки прямих та обернених задач геопотенціальних полів з урахуванням впливу неоднорідності середовища. Запропонована модель статичного векторного поля задається системою диференціальних рівнянь першого та другого порядків. Рівняння вміщують як характеристики поля (напруженість, потенціал), так і фізичні властивості середовищ, в яких це поле існує і які впливають на величини поля.

The system of the differential equations of the static (gravitational, electric, magnetic) field in the heterogeneous continuous mediums, which allows to obtain a new solutions of the direct and inverse problems of the geopotential fields, considering the influence of heterogeneity of the studied models is proposed. This model of the static vector field is described by a system of differential equations of the first and second orders. The equations includes the characteristics of the field (tension, potential) and physical characteristics of the environments in which this field exists and which influence to the magnitude of the field.

Статья посвящена вопросу развития теории геопотенциальных полей в неоднородных сплошных средах. Предлагаемая система дифференциальных уравнений стационарного поля, создаваемого одним источником (массой, электрическим зарядом, магнитной массой) в неоднородной среде, включает как аналоги известных ранее дифференциальных уравнений электростатического поля, так и уравнения, являющиеся совершенно новыми, например, для гравитационного поля. Учет влияния геоплотностной неоднородности при расчете гравитационного эффекта от каждого элемента аппроксимации модели приводит к повышению точности и информативности результатов интерпретации данных гравиразведки.

Гипотезы об ослаблении гравитационного излучения материальным телом выдвигались учеными давно [1, 2]. Ослабление силы притяжения между двумя телами при наличии между ними плотностного экрана задавалось введением в закон Ньютона экспоненциального множителя e^{-hL}, где *h* – коэффициент ослабления силы на единицу длины массы удельной плотности, *L* – толщина экрана или длина пути, проходимого гравитационным лучом.

В статье предлагается иной подход к изучению влияния сплошной материальной среды, окружающей массу, на гравитационное поле этой массы. Последовательно проводится: 1) обоснование влияния однородных сред на поле массы и запись коэффициента ослабления поля в среде с плотностью, отличной от нуля; 2) получение уравнений определения характеристик поля (напряженность, потенциал) в неоднородных по своим плотностным характеристикам средах. При этом рассматривается не взаимодействие (или сила взаимодействия) источников поля – масс друг с другом, а изучается процесс распространения энергии источника поля в среде, которая заполнена источниками аналогичного по своей природе поля. Фактически уже на стадии постановки задачи подразумевается, что классический принцип суперпозиции полей в неоднородных средах сохраняется только для первой своей части: поле от нескольких источников определяется как сумма полей от каждого из этих источников, однако поле от каждого источника рассчитывается с учетом влияния материальности окружающей его среды, в отличие от общепринятого расчета поля источника как поля в вакууме.

Наряженность $\vec{E}$ гравитационного поля массы, занимающей объем *dV* плотностью $\sigma_{ист} = const$, согласно [3], в вакууме определяется по формуле

$$\vec{E}_{в}(x,y,z) = -\gamma \frac{\sigma_{ист}\, dV}{r^2}\frac{\vec{r}}{r},$$

где γ – гравитационная постоянная; $\vec{r}$ – вектор, направленный от источника (массы $dm = \sigma_{ист}\, dV$) к точке наблюдения с координатами *(x, y, z)*.

Поместим этот источник в однородную безграничную среду с плотностью $\sigma_{ср} = \sigma(x,y,z) = const$. Простым геометрическим сложением векторов напряженности поля источника и напряженности поля симметричного относительно точки наблюдения элемента среды (массы $\sigma_{ср}\, dV$) получим выражение для определения напряженности поля одного источника в однородной среде с ненулевой плотностью:

$$\vec{E}_{ср}(x,y,z) = -\gamma \frac{(\sigma_{ист} - \sigma_{ср})\, dV}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}.$$

Запишем последнюю формулу в несколько ином виде.

$$\vec{E}_{ср} = \vec{E}_{в}\frac{\sigma_{ист} - \sigma_{ср}}{\sigma_{ист}}. \qquad (1)$$

Соответственно потенциал поля источника определится как

$$U_{ср} = U_{в}\frac{\sigma_{ист} - \sigma_{ср}}{\sigma_{ист}}. \qquad (2)$$

Следовательно, поле источника в однородной среде с $\sigma_{ср} = \sigma(x,y,z) = const$ ослабляется по сравнению с полем этого же источника в вакууме в $\dfrac{\sigma_{ист} - \sigma_{ср}}{\sigma_{ист}}$ раз. Совершенно естественным представляется постулировать положение: напряженность поля источника в однородной среде с $\sigma_{ср} \neq 0$ не может быть больше напряженности поля, создаваемого этим же источником в вакууме.

Разность $\sigma_{ист} - \sigma_{ср}$ носит общепринятое в гравиметрии название избыточной плотности. Традиционно при расчете аномальных гравитационных эффектов сложилась практика оперировать как с положительной

© Вдовина Е., 2010

$\sigma_{ист} \geq \sigma_{ср}$, так и с отрицательной $\sigma_{ист} < \sigma_{ср}$ избыточной плотностью. Возможны три варианта.

1. Избыточная плотность положительна, $\sigma_{ист} > \sigma_{ср}$. В этом случае поле источника существует, т. е. может быть зарегистрировано в любой точке среды. Напряженность поля массы dm в среде $\vec{E}_{ср}$ совпадает по направлению с напряженностью поля идентичного источника в вакууме $\vec{E}_{в}$; модуль вектора $\vec{E}_{ср}$ меньше модуля $\vec{E}_{в}$ в $\dfrac{\sigma_{ист} - \sigma_{ср}}{\sigma_{ист}}$ раз (рис. 1, а).

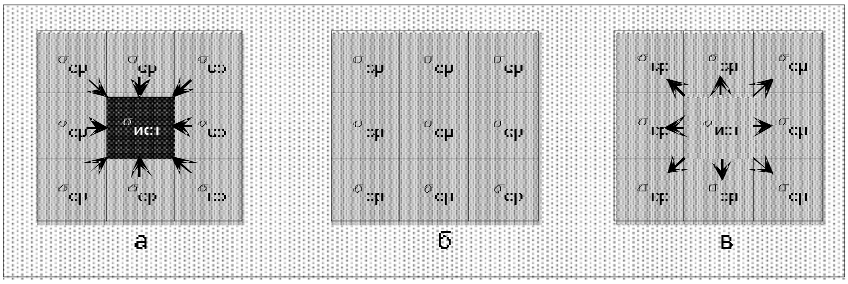

Рис. 1. Поле источника в однородных безграничных средах: а) – избыточная плотность больше 0; б) – избыточная плотность равна 0; в) – избыточная плотность меньше 0

2. Избыточная плотность равна 0, $\sigma_{ист} = \sigma_{ср}$. В формуле (2) коэффициент $\dfrac{\sigma_{ист} - \sigma_{ср}}{\sigma_{ист}} = 0$. Напряженность поля элемента среды $\sigma_{ср}\, dV$ в однородной безграничной среде равна 0. Это означает, что в однородной безграничной среде гравитационное поле отсутствует (рис. 1, б).

3. Избыточная плотность отрицательна, $\sigma_{ист} < \sigma_{ср}$. В этом случае поле от источника (массы $dm = \sigma_{ист}\, dV$) не может быть зарегистрировано в пространстве, окружающем источник. Это положение необходимо обосновать, исходя как из формальных, так и из физических предпосылок.

С формальной точки зрения: допустим, что $\sigma_{ср} >> \sigma_{ист}$, для физической абсурдности достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\sigma_{ср} > 2\sigma_{ист}$. Тогда, основываясь на (2), получим, что $\left|\vec{E}_{ср}\right| > \left|\vec{E}_{в}\right|$, т. е. модуль вектора напряженности в среде больше, чем модуль вектора напряженности гравитационного поля этого же источника в вакууме. Поскольку величины напряженности и объемной плотности энергии поля связаны, это недопустимо.

Далее – в этом случае вектор $\vec{E}_{ср}$ противоположен по направлению вектору $\vec{E}_{в}$. Это означает, что положительная масса dm>0 создает поле отталкивания, а не тяготения, что вообще противоречит природе гравитационного поля.

С физической точки зрения: если рассматривать статическое гравитационное поле как непрерывно возобновляемый в каждой точке поток гравитационной энергии, то для элемента среды с плотностью $\sigma_{ист} < \sigma_{ср}$ поток из объема dV не может быть наблюден, поскольку этот поток уничтожается более мощным потоком гравитационной энергии от соседних, с $\sigma_{ср} > \sigma_{ист}$, и, следовательно, более мощных (интенсивных) источников. Фактически в этом случае точка с $\sigma_{ист} < \sigma_{ср}$ является "стоком" поля, а не источником. Еще раз необходимо заметить, что рассматривается идеализированная модель безграничной однородной среды в отсутствие внешнего гравитационного поля .

Таким образом, присутствие вокруг источника однородной среды с ненулевой плотностью ослабляет (а в случае $\sigma_{ср} > \sigma_{ист}$ – уничтожает) поле данного источника по сравнению с полем в вакууме. Коэффициент ослабления напряженности и потенциала определяется отношением $\dfrac{\sigma_{ист} - \sigma_{ср}}{\sigma_{ист}}$. Если принять как основу гипотезу, трактующую стационарное гравитационное поле как непрерывный и непрерывно возобновляемый во времени поток энергии, то ослабление напряженности поля – суть потери гравитационной энергии в процессе ее непрерывного возобновления в каждой точке среды. Чем больше плотность окружающей источник среды, тем меньше величина напряженности поля, и, сответственно, меньше объемная плотность энергии поля. Поскольку однородные среды с различными плотностями в неравной степени ослабляют поле одного и того же источника, то в неоднородной среде с $\sigma_{ср}(x, y, z) \neq const$ напряженность поля источника в общем случае должна зависеть от характера распределения плотности вещества в среде, окружающей источник.

Для получения уравнений поля в неоднородной среде предлагается следующая идеализированная модель явления.

Рассматривается гравитационное поле, создаваемое массой элементарного объема среды $dm = \sigma_{ист}\, dV$. Источник в точке S находится в среде с плотностью $\sigma(x, y, z)$ и создает в среде гравитационное поле. Среда обладает запасом потенциальной энергии, величина которой зависит от характеристики среды $C(x, y, z)$:

$$C(x,y,z) = \gamma(\sigma_{ucm} - \sigma(x,y,z))dV \,. \qquad (3)$$

Эта энергия проявляется как способность среды уменьшать (ослаблять) поле источника. Для однородных сред с различными плотностями коэффициенты ослабления поля одного и того же источника различны (см. (1), (2)). Поэтому представляется логичным предположить, что в неоднородной среде с $\sigma(x,y,z) \neq const$ происходит неравномерное уменьшение энергии поля источника. Объемная плотность энергии поля [3] пропорциональна квадрату напряженности поля в среде $\vec{E}_{cp}(x,y,z)$, поэтому следует допустить, что в общем случае линии напряженности поля могут рассматриваться как энергетические линии, т. е. как условные линии в пространстве, вдоль которых распространяется поток энергии. Для неоднородных сред энергетические линии будут в общем случае криволинейны вследствие дифференциации среды по плотностной характеристике (рис. 2). При этом в любой точке изменение величины и направления потока гравитационной энергии определяется изменением вектора $\vec{E}_{cp}$, которое может быть описано дифференциальными характеристиками, и, со всей очевидностью, зависит от поведения функции $\sigma_{cp}(x,y,z)$ в окрестности данной точки.

Рассмотрим простейшую плотностную модель среды: два безграничных однородных слоя разделены плоской поверхностью раздела, плотности слоев σ_{cp1} и σ_{cp2} (рис. 3).

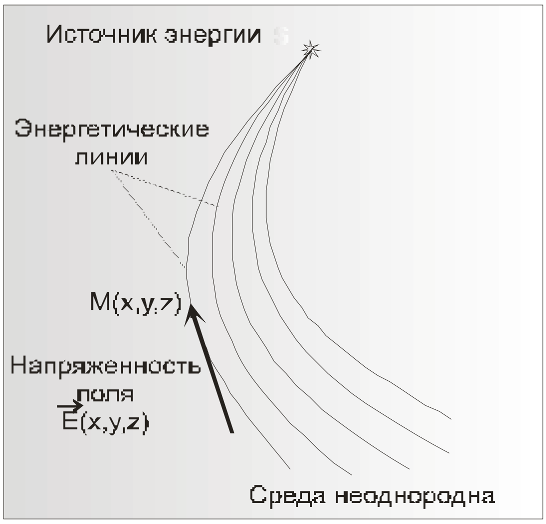

Рис. 2. Линии напряженности гравитационного поля источника в неоднородной среде

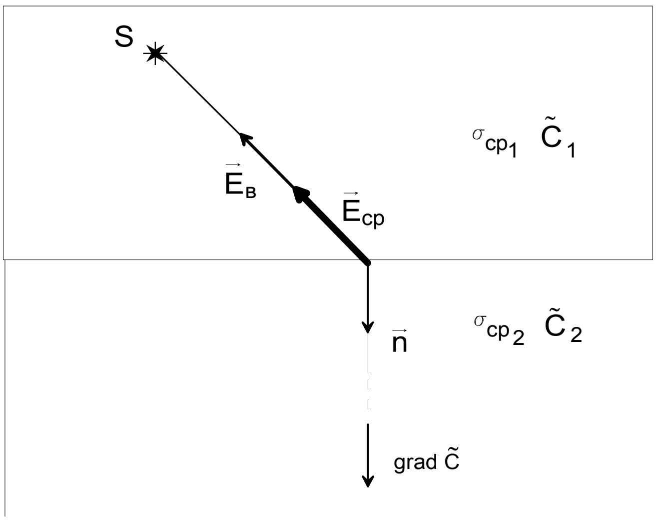

Рис. 3. Определение поля на поверхности раздела двух однородных сред

В первой среде в точке S находится источник поля – масса $dm = \sigma_{ucm}\, dV$. Пусть выполняется условие $\sigma_{ист} \geq \sigma_{cp_1}$, т. е. этот источник создает в среде 1 гравитационное поле. Обозначим величину

$$\frac{\sigma_{ucm} - \sigma_{cp}(x,y,z)}{\sigma_{ucm}} = \widetilde{C}(x,y,z) \,. \qquad (4)$$

Безразмерная функция $\widetilde{C}(x,y,z)$ несет такую же смысловую нагрузку избыточной плотности, как и функция характеристики среды (3). Еще раз отметим, что рассматривается поле одного источника $dm = \sigma_{ист}\, dV$, поэтому для одной и той же среды $\sigma_{ср}(x, y, z)$ и различных $\sigma_{ист}$ функции C, $\widetilde{C}$ также будут различны. Для более компактной записи формул далее все функции указываются без аргументов, подразумевается, что $\vec{E}_{ср} = \vec{E}_{ср}(x, y, z)$, $U_в = U_в(x, y, z)$, $C = C(x, y, z)$, ... – функции декартовых прямоугольных координат.

Для поля в первой среде справедлива формула (1), с принятым в формуле (4) обозначением это выражение запишется как

$$\vec{E}_{ср} = \vec{E}_в\, \widetilde{C}. \tag{5}$$

Соответственно

$$U_{ср} = U_в\, \widetilde{C}.$$

На поверхности раздела со стороны первой среды напряженность поля источника $\vec{E}_{ср1}$ совпадает по направлению с вектором напряженности этого источника в вакууме $\vec{E}_в$. Так как по условию существования поля $\sigma_{ист} \geq \sigma_{ср}$, то функция $\widetilde{C}$ всегда положительна и меньше или равна 1. Модуль вектора $\vec{E}_{ср1}$ меньше модуля $\vec{E}_в$ в $\widetilde{C}_1$ раз.

На поверхности раздела характеристика среды меняется скачкообразно, градиент функции $\widetilde{C}$ здесь достигает очень больших значений ввиду конечной разности плотности сред на очень малых расстояниях. Направление вектора $grad\,\widetilde{C}$ определяет направление нормали к поверхности раздела $\vec{n}$. Запишем вектор напряженности поля $\vec{E}_{ср}$ как градиент потенциала $U_{ср}$, учитывая, что функция $\widetilde{C}$ не везде постоянна, а именно – в точках на поверхности $grad\,\widetilde{C}$ отличен от нуля.

$$\vec{E}_{ср} = -grad\, U_{ср} = -grad\,(U_в\, \widetilde{C}) = \vec{E}_в\, \widetilde{C} - U_в grad\,(\widetilde{C}). \tag{6}$$

Из последнего уравнения следует, что:

- тангенциальные компоненты вектора напряженности при переходе через поверхность раздела двух сред с различными характеристиками остаются непрерывными;
- нормальная компонента вектора $\vec{E}_{срn}$ терпит разрыв при переходе через поверхность раздела;
- уравнение (6) нельзя использовать для определения характеристик поля в неоднородных средах, поскольку при переходе через поверхность раздела вектор $\vec{E}_{ср}$ во второй среде как минимум отличается от вектора $\vec{E}_в$ по направлению;
- при таком подходе по уравнению (6) невозможно определить нормальную компоненту напряженности поля $\vec{E}_{срn2}$ во второй среде, так как в непосредственной близости к поверхности раздела ее величина достигает очень больших значений. По аналогии с электростатическим полем [4] допустим, что это большое поле является свойством самой поверхности и быстро спадает на малых расстояниях от нее.

Пусть источник – масса $dm = \sigma_{ист}\, dV$ – находится в точке S (рис. 4) и создает в неоднородной окружающей среде с характеристикой $C(x, y, z)$ (см. (3)) поле. Это означает, что можно наблюдать напряженность поля источника $\vec{E}_{ср}$ как векторную однозначную функцию координат. Пусть функция *C* непрерывна вместе со своими производными до второго порядка. Тогда всегда можно определить вектор $\vec{r}^{\,*}$, имеющий физический смысл расстояния, такой, чтобы выполнялось равенство:

$$\vec{E}_{ср} = C \frac{\vec{r}^{\,*}}{\left(r^*\right)^3}. \tag{7}$$

При этом в любой точке, где однозначно определен вектор $\vec{E}_{ср}$ и выполняется условие непрерывности функции C и ее производных, вектор $\vec{r}^{\,*}$ будет определен единственным образом, т. е. начало этого вектора в точке S^* будет строго фиксированным.

Для определения характера изменения $\vec{E}_{ср}$ в неоднородной среде достаточно получить уравнения, связывающие дифференциальные характеристики $\vec{E}_{ср}$ с функцией *C* и ее производными. Поэтому нет необходимости определять сам вектор $\vec{r}^{\,*}$, введение которого в рассмотрение является скорее иллюстративным приемом, аналогичным, например, построению фиктивных зарядов в электростатике диэлектриков [4]. Существенным, однако, является тот факт, что для каждой точки среды, где определена напряженность поля данного источника, этот вектор задается единственным образом. Поэтому допустима следующая запись формулы (7):

$$\frac{\vec{E}_{ср}}{C} = \frac{\vec{r}^{\,*}}{\left(r^*\right)^3}.$$

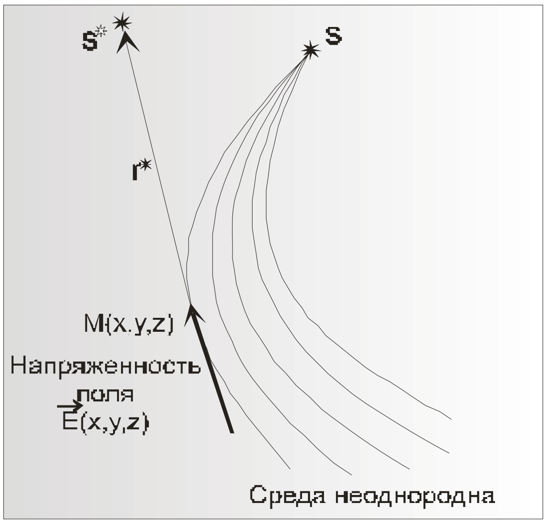

Рис. 4. Построение вектора $\vec{r}^{*}$ в неоднородной среде

Применим операции ротора и дивергенции к обеим частям последней формулы. Учитывая, что ротор и дивергенция поля центральных сил в правой части равны 0 [5], получим систему дифференциальных уравнений, позволяющих определить напряженность поля одного источника в неоднородной среде:

$$div\left(\frac{\vec{E}_{cp}}{C}\right) = 0. \quad (8)$$

$$rot\left(\frac{\vec{E}_{cp}}{C}\right) = 0. \quad (9)$$

Система (8)-(9) является основной для определения гравитационного поля в неоднородной среде. Аналогично можно получить уравнение для определения потенциала поля в неоднородной среде:

$$\Delta\left(\frac{U}{C}\right) = 0. \quad (10)$$

Дифференциальные уравнения (8)-(10) при соответствующем задании функции характеристики среды *C(x, y, z)* справедливы для электростатического и магнитного полей.

Для электростатического поля одного источника элементарного объема с плотностью заряда $\delta_{ист}^{эл}$ в среде, которая характеризуется диэлектрической проницаемостью $\varepsilon(x, y, z)$ и содержит неподвижные электрические заряды с плотностью $\delta^{эл}(x, y, z)$, характеристика среды определяется формулой:

$$C(x, y, z) = \frac{(\delta_{ист}^{эл} - \delta^{эл}(x, y, z))dV}{\varepsilon(x, y, z)}.$$

Для магнитного поля, создаваемого магнитной массой элементарного объема плотностью $\delta_{ист}^{м}$, в присутствии среды, характеризующейся магнитной проницаемостью $\mu(x, y, z)$ и включающей неподвижные магнитные массы, распределенные в пространстве с плотностью $\delta^{м}(x, y, z)$

$$C(x, y, z) = \frac{(\delta_{ист}^{м} - \delta^{м}(x, y, z))dV}{\mu(x, y, z)}.$$

Соответствующим заданием функции характеристики среды С (как частный случай) возможно получение известных [3, 4] уравнений электростатического поля в проводниках или в диэлектриках. Уравнения (8)-(10) также возможно использовать для расчетов в смешанных средах, состоящих для электрического поля из системы электрических зарядов, произвольно расположенных в неоднородном диэлектрике. Для магнитного поля возможно задание среды, неоднородной по магнитным свойствам и содержащей произвольное распределение магнитных масс различной плотности.

В однородных и кусочно-однородных средах уравнения (8)-(10) переходят в основную систему уравнений для статического поля [6]:

$$div\,\vec{E} = 0,\ \ rot\,\vec{E} = 0,\ \ \Delta U = 0.$$

Предлагаемая система дифференциальных уравнений статического (гравитационного, электрического, магнитного) поля в неоднородных сплошных средах позволяет получить унифицированные новые решения прямых и обратных задач геопотенциальных полей с учетом влияния неоднородности изучаемых моделей.

1. *Михайлов И.Н.* Возможности и проблемы гравиразведки. Мат. 32-й сессии Межд. науч. сем. им. Д.Г. Успенского "Вопросы теории и практики геологической интерпретации гравитационных, магнитных и электрических полей". – Пермь, 2005. 2. *Михайлов И.Н.* Гравитация и гравиразведка. Геофизика. – 2005. – №1. – С. 38-49. 3. *Овчинников И.К.* Теория поля. – М., 1979. 4. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. Теоретическая физика, Т. VIII. М., 1982. 5. *Бронштейн И.Н., Семендяев И.К.*. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов. Изд. перераб. под ред. Г. Гроше и В. Циглера. Лейпциг: Тойбнер. М., 1981. 6. *Альпин Л.М.* Теория поля. – М., 1996.

Надійшла до редколегії 27.01.10