

УДК 624.131:550.34

Д.В. Мелконян, канд. фіз.-мат. наук,
Е.А. Черкез, д-р геол.-мінералог. наук

МОДЕЛЮВАННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ ПОРІД СХИЛІВ СКЛАДНОЇ ГЕОЛОГІЧНОЇ БУДОВИ КОМПЛЕКСНИМ МЕТОДОМ ГРАНИЧНИХ ЕЛЕМЕНТІВ З УРАХУВАННЯМ СЕЙСМІЧНОСТІ

Застосовано аналітико-чисельний метод – комплексний метод граничних елементів для розв'язку плоскої задачі напруженого стану зсувних схилів і укосів, а також для оцінки їх стійкості з урахуванням фільтраційного зважування та сейсмічності. Побудовано ізолінії нормальних, дотичних напружень і стійкості всередині досліджуваного схилу.

An analytical-numerical technique – the complex variable boundary element method is applied for landslides stress state plain problem solution, and also for estimation of their stability taking account the filtrational weighing and seismicity. The isolines of normal, tangential stresses and of stability are constructed inside of investigated slope.

Для визначення напруг в однорідних укосах за відсутності в приукісних зонах пластичних областей доцільно використовувати теорію функцій комплексного змінного [9], що дозволяє одержати розв'язок задач теорії пружності з точним задоволенням граничних умов. Напружений стан однорідних вагомих гірських масивів із криволінійними межами розглядається в багатьох роботах [1; 3; 8; 12]. У деяких роботах, крім об'ємних, враховуються також власні сили і поверхневі навантаження. Зазначені дослідження, хоча і становлять великий науковий інтерес, однак мають недоліки. У них функція, що відображає, не цілком охоплює різноманітні особливості будови масивів порід і рельєф схилу. Крім того, на відміну від інших методів, наприклад, методу кінцевих різниць чи методу скінченних елементів, де використовується апроксимація в області, і розв'язок є наближеним у всій області, у комплексному методі граничних елементів (КМКЕ) використовується апроксимація функцій на межі області, однак сам розв'язок є точним усередині області з апроксимованою межею. Даний метод застосовується для розв'язання двовимірних задач теорії потенціалу.

Використовуваний метод КМКЕ ґрунтується на застосуванні інтегральної формули Коші в звичайному методі граничних інтегральних рівнянь і наступній побудові алгоритму для ЕОМ, що дозволяє ефективно розв'язувати задачі моделювання.

Досліджуваний нами масив гірських порід схилів і укосів розглядається як пружне потенційне поле, що створюється напруженнями. Це дозволяє ввести скалярну величину, що істотно полегшує його опис і вимір. Її можна назвати потенціалом об'ємних сил θ (у випадку плоскої задачі $\theta = \sigma_x + \sigma_z$, де σ_x і σ_z – нормальні напруження). За допомогою потенціалу пружного поля можна побудувати ізопотенційні лінії, що описуються рівнянням $\varphi = \theta = \text{const}$. Ізопотенційні лінії, перетинаючись з силовими лініями ($\psi = \text{const}$), утворюють ортогональну сітку [4; 6; 14]. Для потенційної φ і силової ψ функцій має місце рівняння Лапласа

$$\Delta^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0, \quad \Delta^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0 \quad (1)$$

і умова Коші – Римана

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2)$$

Умови (2) свідчать про ортогональність силової та ізопотенційної ліній.

Застосування функції комплексного змінного може суттєво полегшити розв'язання крайових задач для двовимірного рівняння Лапласа. Комплексне пружне поле характеризується комплексним потенціалом ω , що залежить від комплексної змінної $z = x + iy$

$$\omega = f(z) = \varphi(x, y) + i\psi(x, y), \quad (3)$$

де φ і ψ є дійсними функціями змінних x і y і задовольняють граничні умови на поверхні схилу.

Для того щоб функція $\omega = f(z)$ була аналітичною, необхідно і достатньо, аби функції φ і ψ були однозначними і задовольняли рівняння Коші – Римана. У такому випадку вони будуть гармонійними функціями, тобто задовольнятимуть рівняння Лапласа. Таким чином, функції комплексної змінної, що складаються з потенціалу φ і силової функції ψ , можна безпосередньо застосовувати для математичного моделювання плоских безвихрових полів. У [2; 13] досить строго і систематично викладені математичні основи КМКЕ.

Суттєвим для КМКЕ є використання інтегральної формули Коші, за допомогою якої визначається апроксимуюча функція $\hat{\omega}(z)$

$$\hat{\omega}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{G_l(\xi) d\xi}{\xi - z} \quad (4)$$

Функція $\hat{\omega}(z)$ ($\hat{\omega}(z_j) = \hat{\varphi}(z_j) + i\hat{\psi}(z_j)$) є аналітичною в області Ω (Ω обмежена замкнутим скінченно-ламаним контуром Γ , рис. 1 ($z \in \Omega$, $\xi \in \Gamma$, $\Omega \cup \Gamma$)) і тому має таку властивість, що її дійсна $\hat{\varphi}(z)$ і уявна $\hat{\psi}(z)$ частини задовольняють в області Ω двовимірне рівняння Лапласа. У рівнянні (4) $G_l(\xi)$ – лінійна глобальна спробна функція, що визначається формулою

$$G_l(z) = \sum_{j=1}^m N_j \bar{\omega}_j = \sum_{j=1}^m N_j(z) \bar{\varphi}_j + i \sum_{j=1}^m N_j(z) \bar{\psi}_j, \quad (5)$$

де

$$\bar{\omega}_j = \bar{\omega}(z_j) = \bar{\varphi}(z_j) + i\bar{\psi}(z_j) = \bar{\varphi}_j(x, y) + i\bar{\psi}_j(x, y),$$

($j = 1, 2, \dots, m$) – задане значення шуканої функції у вузловій точці z_j ; $\bar{\varphi}_j$ і $\bar{\psi}_j$ – дійсні числа, задані у вузлі z_j . У (4) величина ξ відноситься до спробної функції і вузлових значень її дійсної (або уявної) частини.

У рівнянні (5) $N_j(z)$ є базисна функція, що відповідає вузлу j ; вона визначається з виразу

$$N_j(z) = \begin{cases} (z - z_{j-1}) / (z_j - z_{j-1}), & z \in \Gamma_{j-1}; \\ (z_{j+1} - z) / (z_{j+1} - z_j), & z \in \Gamma_j; \\ 0, & z \notin \Gamma_{j-1} \cup \Gamma_j. \end{cases} \quad (6)$$

Формула (4) зв'язує значення функцій у деякій внутрішній точці області (в комплексній точці) з інтегралом від функції по межі області. Звідси випливає, що значення функції в області, де вона є аналітичною, цілком визначаються її значеннями на межі.

Оцінюючи внесок кожного граничного елемента Γ_j , рівняння (4) можна записати як

$$2\pi i \hat{w}(z_0) = \sum_{j=1}^m [\bar{w}_{j+1}(z_0 - z_j) - \bar{w}_j(z_0 - z_{j+1})] h_j / (z_{j+1} - z_j). \quad (7)$$

$$h_j = \ln(|z_{j+1} - z_0| / |z_j - z_0|) + i\theta(j+1, j),$$

де $\theta(j+1, j)$ – кут між променями, що з'єднують вузли z_j і z_{j+1} з точкою $z_0 \in \Omega$, рис. 1.

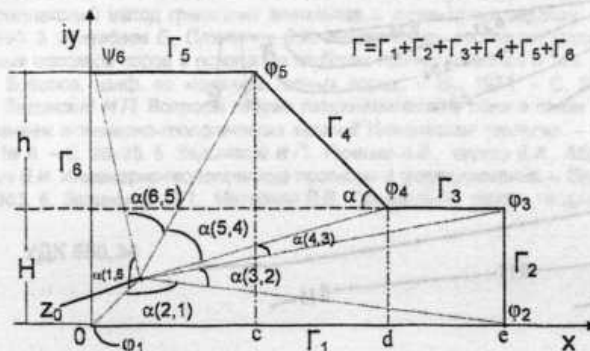


Рис. 1. Взаємне розташування точки z_0 і граничного елемента Γ_j в межах схилу

Таким чином, якщо представити пружне потенційне поле в масивах гірських порід зсувних схилів і укосів як комплексне поле, то для розв'язання плоскої крайової задачі для такого поля можна застосовувати КМКЕ, що є компактним в ідеї інтегрування по межі і може застосовуватися в інженерно-геологічних розрахунках.

Розглянемо змішану крайову задачу для рівняння Лапласа (для неоднорідної багатокутної області Ω , рис. 1, що містить шари з різними геомеханічними характеристиками). Напруження на верхній межі схилу можна прийняти рівними нулю, тому що їх максимальне значення в граничному стані не перевищує опору ґрунту на

розрив, величина якого, згідно з експериментальними даними [5; 7], є досить малою порівняно з реальними напруженнями, що виникають у тілі схилу, укосу. На самому схилі (похила ділянка) звичайно задають або значення потенціалу θ , що лінійно змінюється, або приймають рівним нулю значення його нормальної похідної $\partial\theta/\partial n$.

На вертикальних ділянках Γ_2 , Γ_6 і на ділянці Γ_1 (рис. 1) приймаємо рівними нулю значення нормальної похідної $\partial\theta/\partial n$. Зазначена постановка приводить до такої змішаної крайової задачі

$$\Delta\theta(x, z) = 0, \quad (x, z) \in \Omega$$

$$\theta(s) = f(s), \quad s \in \Gamma_3 \cup \Gamma_4 \cup \Gamma_5$$

$$\frac{\partial\theta}{\partial n}(s) = 0, \quad s \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_6,$$

$$f(s) = C_0 \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq c, \quad z = H+h, \quad (s \in \Gamma_5); \\ \frac{x-c}{d-c}, & c < x \leq d, \quad z = kx, \quad (s \in \Gamma_4); \\ 1, & d < x \leq e, \quad z = H, \quad (s \in \Gamma_3). \end{cases} \quad (8)$$

Тут C_0 приймається рівним величині $\gamma_0 h$, де γ_0 – питома вага породи; h – висота схилу; $k = h/(d-c) = \tan(\alpha)$, α – кут схилу (рис. 1).

Досліджуваний схил (крутістю $\alpha = 13^\circ$) розташований у районі клініки ім. Філатова (м. Одеса), рис. 2.

Тоді, з огляду на граничні умови (8), задаючи значення функцій $\varphi(z)$ і $\psi(z)$ на контурі (рис. 2), можна обчислити їх значення всередині досліджуваної ділянки. Значення нормальних і дотичних напруг можна визначити як [11]:

$$\sigma_x = \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{2}z \frac{\partial\theta}{\partial z}, \quad \sigma_z = \frac{1}{2}\theta + \frac{1}{2}z \frac{\partial\theta}{\partial z}, \quad \tau_{xz} = -\frac{1}{2}z \frac{\partial\theta}{\partial x}. \quad (9)$$

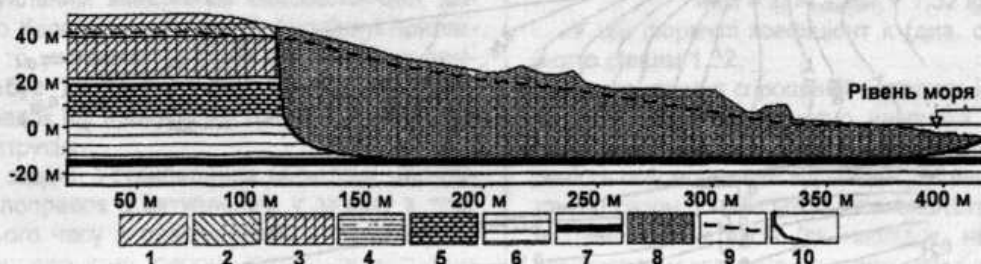


Рис. 2. Схематизований інженерно-геологічний розріз: 1 – суглинок лесовий напівтвердий; 2 – супісок лесовий текучий; 3 – суглинок лесовий м'якопластичний; 4 – глина червоно-бура; 5 – вапняк-черепашник; 6 – глина меотична; 7 – лігнітований прошарок; 8 – зсувні нагромадження; 9 – рівень ґрунтових вод; 10 – поверхня зсуву

Коефіцієнт стійкості визначається співвідношенням утримуючих сил і сил, що зрушують:

$$k_{ycm} = \frac{\sum_{i=1}^n \tau'_{y\partial}}{\sum_{i=1}^n \tau'_{cd\partial}}, \quad \tau_{y\partial} = \sigma_n \tan(\varphi) + C, \quad \tau_{cd\partial} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin(2\alpha). \quad (10)$$

де $\tau'_{y\partial}$ – опір зсуву в i -тій точці масиву, $\tau'_{cd\partial}$ – діюче дотичне напруження в тій же точці, φ – кут внутрішнього тертя, C – зчеплення. У (10) σ_1 , σ_2 і σ_n визначаються як

Сейсмічність і гідростатичне зважування враховувалися в граничних умовах, що, відповідно, відображається на значеннях нормальних і дотичних напружень усередині досліджуваного схилу. Значення $\varphi(z)$ ($\varphi = \theta$) у вузлових точках поверхні визначалися з врахуванням у C_0 (див. (8)) сейсмічності і гідростатичного зважування: $C_0 = [\gamma_i(1-m) - \gamma_w] h$, де i – номер шару, що лежить вище розглянутої вузлової точки; m – коефіцієнт сейсмічності [10]; γ_i – питома вага порід для i -того шару; γ_w – питома вага води. При обчисленні $\varphi(z)$

і $\psi(z)$ для кожного шару (рис. 2) граничні умови відповідно змінюються, а значення утримуючих сил (див. (10)) обчислюються з урахуванням зміни кута внутрішнього тертя ϕ і зчеплення C .

Для обчислення напружень після запису відповідних рекурентних формул складена програма мовою "C". Ізолінії напружень і стійкості були побудовані за допомогою програми "Golden Software Surfer".

На рис. 3 і 4 представлені ізолінії нормальних, дотичних напруг, а також ізолінії стійкості в межах досліджуваного схилу з урахуванням і без урахування сейсмічності.

Як видно з рис. 3 і 4, у результаті дії сейсмічності зміна розподілу нормальних і дотичних напруг і їхніх значень відбувається тільки в основі схилу. За відсутності сейсмічності величина цих напруг незначно збільшується.

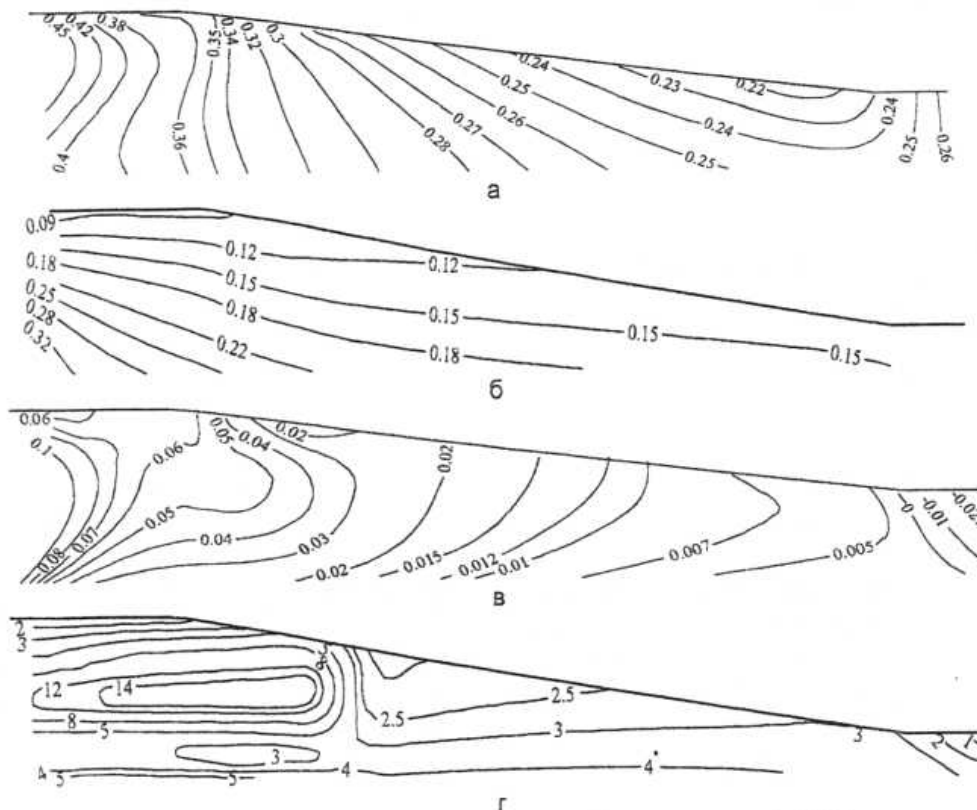


Рис. 3. Розподіл ізоліній горизонтальних σ_x (а), вертикальних σ_z (б), дотичних τ_{xz} (в), МПа напружень і стійкості (г) з урахуванням гідростатичного зважування і сейсмічності

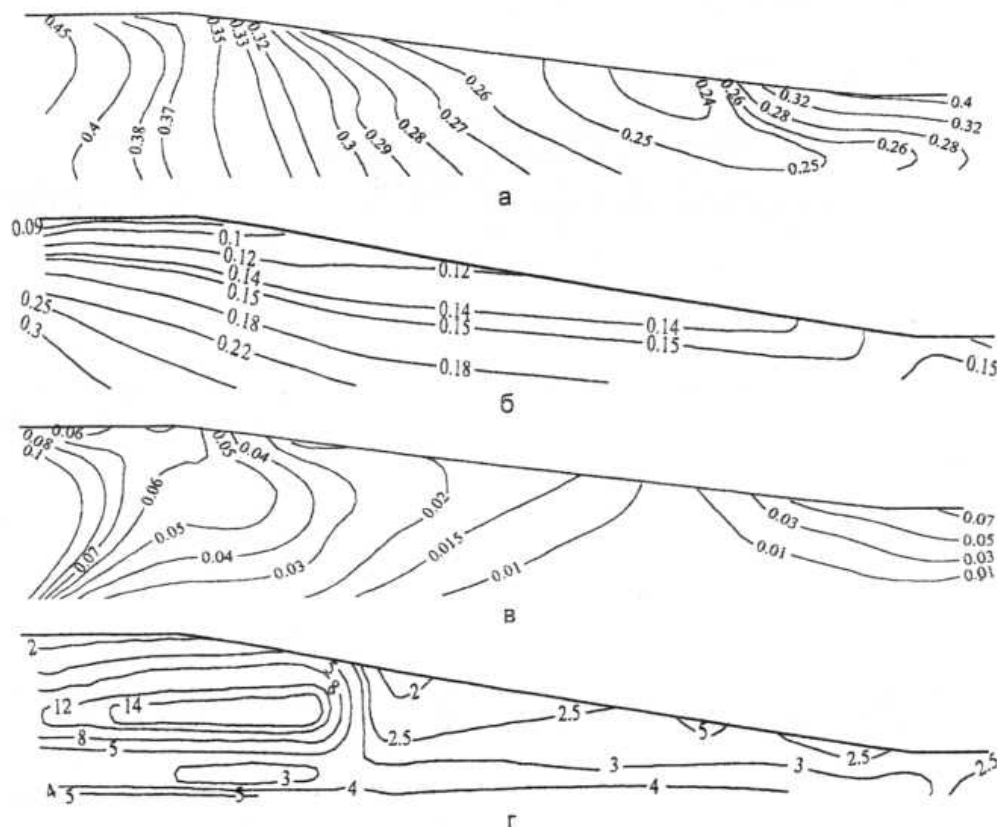


Рис. 4. Розподіл ізоліній горизонтальних σ_x (а), вертикальних σ_z (б), дотичних τ_{xz} (в), МПа напружень і стійкості (г) з урахуванням гідростатичного зважування і без урахування сейсмічності

Висновки. Вплив сейсмічності на напружений стан і стійкість досліджуваного схилу, що характеризується певним значенням стійкості, є незначним.

Комплексний метод граничних елементів дозволяє з достатнім для практики ступенем точності розв'язувати задачу оцінки напруженого стану схилів і укосів при пружному розподілі напруг у масиві гірських порід.

1. Ахпателов Д.М., Тер-Мартirosян З.Г. О напряженном состоянии весомых полубесконечных областей // Изв. АН Арм. ССР. Сер. Механика. – Ереван, 1971. – Т. XXIV. – № 3. – С. 33–40.
2. Громадка II Т., Лей Ч. Комплексный метод граничных элементов и инженерных задачах. – М., 1990.
3. Жумабаев Б., Степанов В.Я. Напряженное состояние анизотропных массивов пород в основании глубоких горных каньонов // Тез. докл. V Всесоюз. конф. по механике горных пород. – М., 1974. – С. 26–27.
4. Зелинский И.П. Вопросы теории геодинамического поля в связи с решением инженерно-геологических задач // Инженерная геология. – 1987. – № 6. – С. 28–35.
5. Зелинский И.П., Гузенко А.В., Черкез Е.А., Абрамович В.И. Инженерно-геологические прогнозы и моделирование. – Одесса, 1983.
6. Зелинский И.П., Мелконян Д.В. Применение теории геодинами-

- ческого поля в решении задач инженерной геологии // Геоэкология. – 1998. – № 3. – С. 85–93.
7. Инженерно-геологические условия северо-западного побережья Черного моря / Зелинский И.П., Черкез Е.А., Шатохина Л.Н. и др. – К., 1989. – (Препр. / АН УССР. Ин-т геол. наук; № 89–8).
8. Калинин Э.В. Об аналитическом решении задачи о распределении напряжений в основании и бортах глубоких речных долин // Тез. докл. IV науч. отчетной конф. геологического факультета МГУ. – М., 1969. – С. 287–288.
9. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966.
10. Рекомендации по количественной оценке и прогнозу устойчивости оползневых склонов / ПНИИИС. – М., 1984.
11. Розовский Л.Б., Зелинский И.П. Инженерно-геологические прогнозы и моделирование. – Одесса, 1975.
12. Тер-Мартirosян З.Г., Ахпателов Д.М. Напряженное состояние горных массивов в поле гравитации // Докл. АН СССР. – 1975. – Т. 220. – № 2. – С. 311–314.
13. Hromadka II T.V., Guymon G.L. A complex variable boundary element method: development // Int. J. for Numerical Methods in Engineering. – 1984. – Vol. 20. – P. 25–37.
14. Zelinsky I.P., Melkonyan D.V. Theory of Geodynamic Field and Landslides Stress Strain // Landslides in research, theory and practice: Proc. of the 8th Int. Symp. on Landslides (Cardiff, June 2000). – London, 2000. – Vol. 3. – P. 1615–1622.

Надійшла до редколегії 23.12.04