

УДК 550.34+550.834

Г.Т. Продайвода, д-р фіз.-мат. наук,
Б.П. Маслов, д-р фіз.-мат. наук

ПРОБЛЕМИ СЕЙСМОАКУСТИЧНИХ ДОСЛІДЖЕНЬ ДИСИПАТИВНИХ І ДИСПЕРСІЙНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ ГЕОЛОГІЧНОГО СЕРЕДОВИЩА

Розглянуто метод розв'язку динамічного рівняння методом функцій Гріна, яку представлено у вигляді статистичної і динамічної складових.

The method of solution of dynamical equation by method of Grin function presented in the form of statically and dynamical components is considered

Останні роки зростає інтерес дослідників до вивчення природних і техногенних явищ у геологічному середовищі. Це зумовлено зростаючим антропогенним впливом на земну кору і збільшенням кількості природних і техногенних катастроф. Їх виникнення зумовлене незворотними процесами, що проходять у реальному геологічному середовищі. Цінну інформацію про механізм цих процесів можна одержати лише шляхом дослідження непружних властивостей середовища – ефективних динамічних сейсмоакустичних властивостей.

Експериментальними дослідженнями встановлено, що в широкому діапазоні частот гірських порід (у т. ч. і інші неоднорідні матеріали) характеризуються майже постійною добротністю. Згідно із співвідношенням Крамерса – Кроніга, яке визначає зв'язок між дисперсією і поглинанням, випливає, що таке середовище повинне мати і помітну дисперсію. Про це свідчать і результати сейсмоакустичних досліджень, згідно з якими при поширенні сейсмічних імпульсів спостерігається асиметрія їх форми.

Теоретичні дослідження взаємозв'язку між дисперсійними і дисипативними властивостями геологічного середовища не дали однозначних результатів. Зокрема, запропоновані феноменологічні теорії частотонезалежності добротності залишають відкритим питання про їх фізичну реалізацію і суперечать принципу причинності. Крім того, залишається нез'ясованим взаємозв'язок цих параметрів із структурними характеристиками геологічного середовища та процесами, що в ньому відбуваються.

У роботі [1] в рамках одномірної геологічної моделі мікронеоднорідного середовища зроблена спроба знайти дисипативні і дисперсійні його властивості, які задовольняють співвідношення Крамерса – Кроніга. Доведено, що при достатньо широкому розподілі параметрів в'язкопружних елементів, у широкому діапазоні частот декремент згасання майже постійний, а фазова швидкість монотонно зростає. Тобто для частотно незалежної добротності достатньо невеликої кількості мікронеоднорідностей, зокрема, наявності малих у масштабі довжини пружної хвилі "м'яких" включень і "широкий" діапазон коливань їх пружних властивостей. Уведена в моделі ефективна в'язкість може бути зв'язана із тепловими втратами на дефектах через сильні температурні градієнти (за рахунок малих розмірів дефектів), так і за рахунок високої швидкості деформації неоднорідного матеріалу поблизу дефектів (міжзернові контакти, порожнини, тріщини тощо).

Разом з тим запропонована модель не враховує розсіювання пружних хвиль на структурних неоднорідностях геологічного середовища різного масштабу. Якщо довжина пружної хвилі набагато більша характерного розміру структурної неоднорідності ($\lambda \gg L_n$), то залежність коефіцієнта згасання хвилі від частоти описується залежністю такого вигляду:

$$\alpha = B_1 f + B_2 f^4, \quad (1)$$

де B_1 – постійний коефіцієнт, який не зв'язаний із наявністю структурних неоднорідностей; B_2 – постійний коефіцієнт, який визначає внесок у згасання пружної хвилі розсіювання на структурних неоднорідностях.

У випадку, коли $\lambda \approx L_n$, основний внесок у згасання пружної хвилі робить розсіювання.

У загальному випадку в реальному геологічному середовищі спостерігається широкий набір різномасштабних ієрархізованих структурних неоднорідностей, які і визначають характер розсіювання і поглинання енергії сейсмічної хвилі.

У зв'язку з цим пропонується новий підхід до вирішення задачі визначення дисипативних і дисперсійних сейсмоакустичних властивостей реального геологічного середовища, який ґрунтується на врахуванні розсіювання і поглинання енергії пружної хвилі.

Для цього використовується залежність між напругами (σ_{ij}) і деформаціями (ε_{kl}) такого виду [5]:

$$\sigma_{ij}(\vec{x}, t) = \lambda_{ijkl}(\vec{x}, t) \varepsilon_{kl}(\vec{x}, t) + \int d\vec{x}' \int dt' K_{ijkl}(\vec{x}, t, \vec{x}', t') \varepsilon_{kl}(\vec{x}', t'), \quad (2)$$

яка описує в'язко-пружну і нелокальну поведінку геологічного середовища при відповідному виборі ядра K_{ijkl} .

Для зручності у символічній формі рівняння (2) можна переписати так:

$$\sigma = L' \varepsilon, \quad (3)$$

де L' – лінійний оператор із компонентами L'_{ijkl} .

Аналогічним чином вводиться поняття оператору моменту, який зв'язує щільність моменту p і швидкість $\dot{u}$, тобто

$$p = p' \dot{u}, \quad (4)$$

де p' – оператор із компонентами p'_{im} , кожний із яких має структуру типу (2).

Задача динаміки неоднорідного геологічного середовища описується рівнянням динамічної рівноваги

$$\sigma_{ij,j} + f_i = \dot{p}_i, \quad (5)$$

з урахуванням співвідношень (3) і (4), граничних і початкових умов; f_i – компонента масових сил.

Розглядається тіло порівняння, яке займає тут область V , але має оператор напруг L^0 і оператор моменту p^0 . Рівняння руху цього тіла описується співвідношенням

$$\left(L^0_{ijkl} u_{k,l} \right)_j + f_i = \left(p^0_{ik} u_{k,l} \right)_l, \quad (6)$$

Релеєвське поле u , яке існує в тілі, викликає в однорідному тілі порівняння поляризації напруг і моменту:

$$\tau = \varphi \varepsilon, \quad \pi = \beta \dot{u}, \quad (7)$$

де $\varphi = L' - L^0$, $\beta = p' - p^0$.

Напруги σ і момент p в оригінальному тілі можна представити так:

$$\sigma = L^0 \varepsilon + \tau, \quad p = \rho^0 \dot{u} + \pi. \quad (8)$$

Розглянемо далі геологічне багатокомпонентне середовище випадкової структури, що складається з еліпсоїдальних анізотропних включень N фаз ($r=1,2,\dots,N$), розподілених випадковим чином у матриці, позначений номером $m = N+1$. В окремому випадку включень однієї фази одержуємо двокомпонентне середовище. Включення будь-якої конкретної фази мають форму еліпсоїда і займають об'єм

$$V_i^{(r)} = \left\{ x : |Z_i^{(r)} x|^2 \leq 1 \right\}, \quad (r=1,\dots,N). \quad (9)$$

Для зручності розрахунків уведемо тензор форми включень Z , що має головні значення $1/a$, $1/b$, $1/c$, що визначають два відношення $w_1 = c/a$ і $w_2 = c/b$. Головні напрямки визначаються координатною системою $x^{(r)}$, орієнтація якої щодо фіксованої лабораторної системи x^A визначається кутами Ейлера φ, ψ, θ .

Поля e^0 й u^0 у правій частині (4), (5) представляють падаючу плоску хвилю

$$u^0 = m e^{-i[k(n \cdot x) + \omega t]}, \quad (10)$$

де $\bar{n}$ – одиничний вектор, m – вектор поляризації хвилі, k – хвильове число, що задовольняє характеристичне рівняння

$$[k^2 L(n) - \rho \omega^2] m = 0. \quad (11)$$

Тут $L(n)$ – матриця з компонентами

$$L_{ij}(n) = L_{ijkl} n_k n_l. \quad (12)$$

Шукається стаціонарне рішення, у якому τ , $i\pi$ залежать від часу тільки через коефіцієнт $e^{-i\omega t}$, що далі опускається.

Оскільки тіло передбачається необмеженим, функція Гріна шукається з умови

$$L(\nabla)G + \rho \omega^2 G + I \delta(x) = 0 \quad (13)$$

і умов випромінювання на нескінченності, що еквівалентні вимозі, щоб G була аналітичною функцією ω у верхній напівплощині комплексної області змінної ω (що відповідає обмеженості залежної від часу G).

Розглянемо тривимірну дельта-функцію у формі

$$\delta(x) = -\frac{1}{8\pi^2} \int_{|\xi|=1} dS \delta''(\xi x). \quad (14)$$

Це дає підставу вивчити рівняння

$$L(\nabla)F + \rho \omega^2 F = I \delta(\xi x), \quad (15)$$

у якому F залежить тільки від добутку (ξx) . Зведемо (6) до більш простого

$$L(\xi)F'' + \rho \omega^2 F = I \delta(\xi x), \quad (16)$$

рішення якого найбільш зручно і просто представити у вигляді нормованих власних векторів $U^N(\xi)$, ($N=1,2,3$) оператора $L(\xi)$. Вони задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} [L(\xi) - \rho \omega^2 I] U^N(\xi) &= 0; \\ (U^N)^T U^N &= 1. \end{aligned} \quad (17)$$

Тут $\omega_N(\xi)$ представляє швидкість можливої плоскої хвилі з одиничною нормаллю ξ . Так, порівнюючи (11) і (17), одержуємо, що m пропорційно $U^N(n)$ і

$$k = \omega / \omega_N$$

для кожного N .

Тоді з (16), (17) випливає

$$F(\xi x) = \frac{1}{2i\rho\omega} \sum_{N=1}^3 \frac{U^N U^{NT'}}{\omega_N} e^{i\omega[\xi \cdot x]/\omega_N} \quad (18)$$

і таким чином, з (5)

$$G(x) = \frac{1}{8\pi^2} \sum_{N=1}^3 \int_{|\xi|=1} dS \frac{U^N(\xi) U^{NT'}(\xi)}{\rho \omega_N^2} \left\{ \delta(\xi \cdot x) + \frac{i\omega}{2\omega_N} e^{i\omega[\xi \cdot x]/\omega_N} \right\} \quad (19)$$

Таке представлення привабливе тим, що показує розкладання функції G на суму статичної складової (при $\omega = 0$) і добавку, викликану динамічною складовою. Оператори S_x і M_x при цьому визначаються:

$$\begin{aligned} S_{pij} &= \\ &= -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{N=1}^3 \int_{|\xi|=1} dS \frac{U_p^N U_i^N \xi_j}{\rho \omega_N^2} \left\{ \delta'(\xi \cdot x) - \frac{\omega^2}{2\omega_N^2} \operatorname{sgn}(\xi x) e^{i\omega[\xi \cdot x]/\omega_N} \right\} \Big|_{(ij)} \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} (S_x)_{pqij} &= -\frac{1}{8\pi^2} \sum_{N=1}^3 \int_{|\xi|=1} dS \frac{\xi_q U_p^N U_i^N \xi_j}{\rho \omega_N^2} \times \\ &\times \left\{ \delta''(\xi \cdot x) - \frac{\omega^2}{\omega_N^2} \delta(\xi \cdot x) - i \frac{\omega^3}{2\omega_N^3} e^{i\omega[\xi \cdot x]/\omega_N} \right\} \Big|_{(ij)(pq)} \end{aligned} \quad (21)$$

$$M_{pi} = -i\omega G_{pi} \quad (22)$$

$$(M_x)_{pqi} = i\omega S_{ipq}, \quad (23)$$

а також

$$S_{ii} = -i\omega S; \quad M_{ii} = -i\omega M. \quad (24)$$

Тоді тензор g можна представити

$$g = \frac{1}{4\pi|Z|} \int_{|k|=1} H(k) |Z^{-1}k|^{-3} dS(k) \rightarrow d\Omega(k), \quad (25)$$

де $\lambda_{im}(k) = \lambda_{ijmn} k_j k_n$ – акустичний тензор.

$$H_{ijmn} \left([\lambda(k)] \right)_{im}^{-1} k_j k_n \Big|_{(ij)(mn)} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} Z &= w_1 \underline{n}^{(1)} \otimes \underline{n}^{(1)} + w_2 \underline{n}^{(2)} \otimes \underline{n}^{(2)} + \underline{n}^{(3)} \otimes \underline{n}^{(3)} \\ \underline{n}^{(3)} &= \underline{n}^{(1)} \times \underline{n}^{(2)}. \end{aligned} \quad (27)$$

$$w_1 = a_3 / a_1, \quad w_2 = a_3 / a_2.$$

З огляду на співвідношення

$$\frac{1}{4\pi|Z|} \int_{|k|=1} |Z^{-1}k|^{-3} dS(k) = 1, \quad (28)$$

одержуємо складові функції Гріна в області перемінних k , що дає можливість застосування чисельних методів, зокрема швидкого перетворення Фур'є, для побудови розв'язку рівняння (13) в області оригіналів.

Одержане співвідношення (19) зручне тим, що воно представляє розклад тензорної функції G на статичну складову ($\omega = 0$) і додаток, зумовлений динамічною складовою.

Для випадку сфероїдальних включень у довгохвильовому наближенні вдається знайти функцію Гріна у зручному для розрахунків вигляді. Це дозволяє в пода-

льшому обчислити ефективні динамічні пружні постійні неоднорідного в'язко-пружного багатокомпонентного анізотропного середовища, які і визначають дисперсійні та дисипативні втрати енергії сейсмічних хвиль.

1. Зайцев В.У., Назаров В.Е., Шульга А.Е. О диссипативных и дисперсионных свойствах микронегоднородных сред. // Акустический журнал. – 2000. – Т. 46. – № 3. – С. 348-355 2. Коэн С.Я. Сейсмическая энер-

гия и методы ее изучения. – М., 1976. 3. Кондратьев О.К. Сейсмические волны в поглощающих средах. – М., 1986. 4. Продайвода Г.Т. Основы сейсмоакустики: Учебный пособие. – К., 2001. 5. Хорошун П.П., Маслов Б.П. Методы автоматизированного расчета Физико-механических постоянных композиционных материалов. – К., 1980. 6. Mechanics of Solids: The Rodney Hill 60th Anniversary Volume. – Oxford; New York; Toronto, 1982.

Надійшла до редколегії 21.12.04