

УДК 550.3 (519.21)

З. Вижва, канд. фіз.-мат. наук, доц.,  
В. Демидов, канд. фіз.-мат. наук, А. Вижва, студ.

### СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ВИПАДКОВИХ ПРОЦЕСІВ ТА ДВОВИМІРНИХ ПОЛІВ В АЕРОМАГНІТОМЕТРІЇ

*Для вирішення проблем кондиційності карт, доповнення даними для досягнення необхідної точності і інших проблем подібного роду в геофізичних задачах, пропонується застосовувати методи статистичного моделювання реалізацій випадкових процесів та багатовимірних випадкових функцій (випадкових полів). Для аналізу даних, їх пропонується розділяти на детерміновану та випадкову складові. Для виділення детермінованої складової пропонується наближення даних кубічними сплайнами. Стаціонарну ж випадкову складову  $\xi_k(x)$  пропонується змодельувати на основі спектральних розкладів випадкових функцій. Модельний приклад – дані аеромагнітної зйомки.*

*To solve the problems of conditional maps, adding of data to achieve the necessary precision, and other such problems in geophysics, it is proposed to apply methods of statistical simulation of realizations of random processes and multi-dimensional random functions (random fields). For data analysis, it is proposed to be divided into deterministic and random components. To separate the deterministic component is proposed approximation of data by cubic splines. The stationary random component is  $\xi_k(x)$  is proposed to modeling on the basis of spectral expansions of random functions. Model example – aeromagnetic data.*

Більшість результатів геофізичних досліджень подається у цифровій формі, точність якої залежить від різних випадкових впливів (в тому числі від точності вимірювання апаратури). При цьому виникає ряд про-

блем, наприклад, у побудові карт за даними вимірювань, коли їх неможливо отримати із заданою деталістю в деяких ділянках. В таких ситуаціях рекомендується застосовувати методи статистичного моделювання [2 – 4, 5] реалізацій випадкових процесів та багатовимірних випадкових функцій (випадкових полів).

Цей напрямок наукових досліджень розробляється вже відносно давно. За останні десятиріччя такий математичний підхід до вирішення геологічних задач використовували, поряд з іншими дослідниками, вчені Shinozuka M., Jan C.M. [7], Mantoglov A., Wilson John L. [6], Chiles J.P., Delfiner P. [5], а також розглядався у роботах Вижви С.А., Вижви З.О. [2, 3]. При цьому використовувались різні способи побудови моделей геологічних об'єктів. В роботі [1] запропоновано застосовувати метод статистичного моделювання випадкових процесів на основі їх спектрального розкладу, який дає можливість за окремими отриманими значеннями їх реалізацій знайти досконале зображення цих процесів на всьому інтервалі спостережень.

Такий метод використовується як для періодичних, так і для неперіодичних стаціонарних випадкових процесів, які можна періодичним способом продовжити на всю числову пряму.

В цій статті описано побудовану модель та розроблено алгоритм статистичного моделювання реалізацій випадкового процесу, який є об'єктом геофізичних досліджень. При цьому було попередньо визначено на основі статистичного аналізу польових даних вимірю-

вань оцінки їх статистичних характеристик: математичного сподівання та кореляційної функції.

Об'єктом дослідження є дані аеромагнітної зйомки масштабу 1:10 000 в районі Овруцької западини, яка була проведена на протязі 1996 – 2002 років. В загальному плані – це зона зчленування Українського кристалічного щита і Прип'ятської западини. Роботу здійснено по 25 профілям із відстанню між ними – 100 метрів. Всі отримані дані є опрацьованими, тобто, в них внесено необхідні поправки.

Запропоновано застосовувати метод статистичного моделювання випадкових процесів на основі їх спектрального розкладу [2 – 4], який дає можливість за окремими отриманими значеннями їх реалізацій знайти більш детальне зображення цих процесів на всьому інтервалі спостережень.

Проведено аналіз статистичного розподілу двовимірних даних аеромагнітної зйомки з використанням програмного продукту для статистичної обробки випадкових полів GeoR. Діаграма даних аеромагнітної зйомки має наступний вигляд на рис. 1. На основі побудованої гістограми зроблено висновок про те, що щільність розподілу двовимірних даних має наближено логарифмічно-нормальний вигляд. Це дає нам підставу прологарифмувати дані і звести їх до наближено нормально розподілених. Таке перетворення надає нам можливість використати розроблений в [2–4] алгоритм для генерування на комп'ютері реалізацій імітованих даних із залученням послідовностей нормально розподілених випадкових величин.

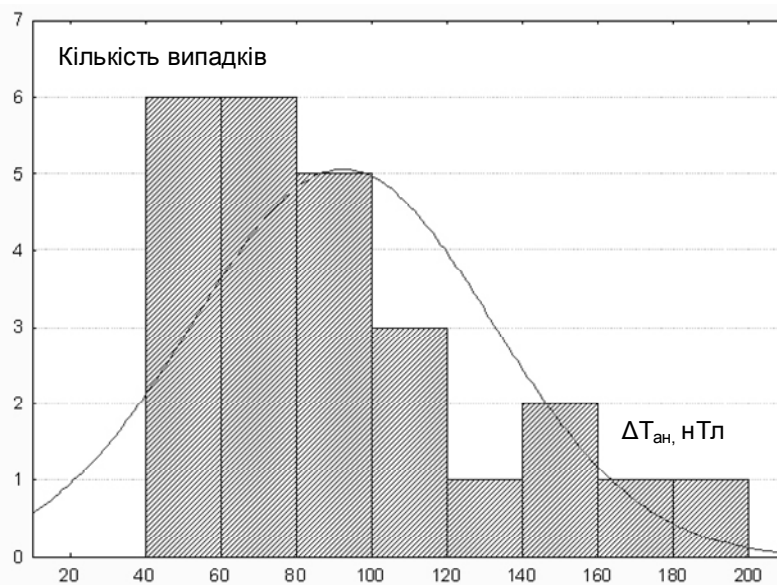


Рис. 1. Діаграма вхідних даних  $\Delta T_{ан}$  по ПР1

Щоб побудувати модель та алгоритм статистичного моделювання для даних аеромагнітної зйомки, окремо по кожному профілю було попередньо здійснено їх статистичний аналіз.

Для цього, за графіком даних, які спочатку прологарифмовано, виділено стаціонарну випадкову складову  $\xi_i(x)$  (так званий "шум" – випадковий процес) і тренд  $f_i(x)$  у вигляді детермінованої функції (експоненціально затухаючої косинусоїди або синусоїди). В результаті цього зроблено висновок, що вхідні дані по кожному профілю (рис. 2) є випадковим процесом  $\eta_i(x)$  такого вигляду ( $i$  – номер профілю,  $M$  – кількість профілів):

$$\eta_i(x) = f_i(x) + \xi_i(x), \quad i = 1, 2, \dots, M. \quad (1)$$

Підібрано для тренда  $f_i(x)$  оптимальні в середньоквадратичному розумінні параметри  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ . Після цьо-

го для даних аеромагнітної зйомки окремо по кожному профілю тренди із формули (1) описуються аналітичними функціями:

$$f_i(x) = a_i e^{-b_i x} \cos(c_i(x - \phi_i)) + p_i, \\ c_i > 0, a_i > 0, b_i > 0, \phi_i > 0$$

Наступний етап роботи полягав у статистичному дослідженні стаціонарної випадкової складової вхідних даних по кожному профілю  $\eta_i(x)$  – випадкового процесу  $\xi_i(x)$ .

Підбір моделі кореляційної функції виділеного шуму  $\xi_i(x)$  здійснено за допомогою пакета програм для статистичної обробки випадкових процесів Statistica (розподіл наближено гауссівський).

Емпіричну кореляційну функцію для кожного профіля було наближено теоретичною кореляційною фу-

нкцією  $B_i(\rho)$  виду експоненціально затухаючої косинусоїди (рис. 3).

$$B_i(\rho) = d_i e^{-h_i \rho} \cos \omega_i \rho, \quad (2)$$

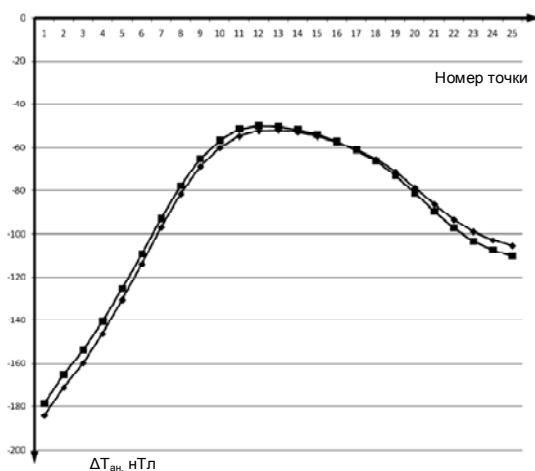


Рис. 2. Вхідні дані  $\Delta T_{ан}$  по ПР1

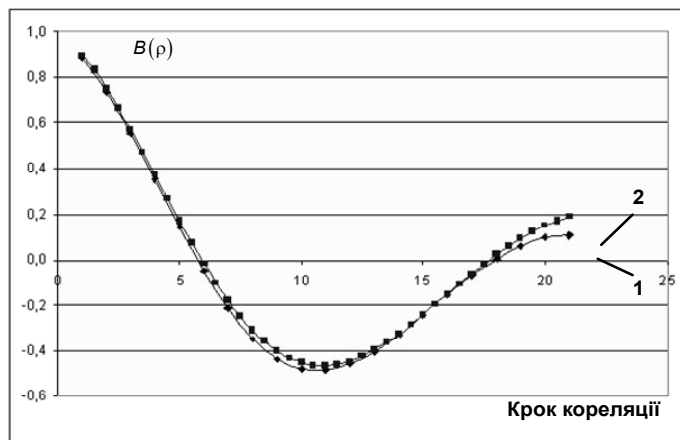


Рис. 3. Кореляційна функція  $\Delta T_{ан}$  по ПР1  $B_i(\rho) = d_i e^{-h_i \rho} \cos \omega_i \rho$ ,

1 – вхідні дані, 2 – вихідні дані (змодельовані)

На основі статистичного аналізу кореляційної функції  $B_i(\rho)$  випадкової складової  $\xi_i(x)$  вхідних даних побудовано **модель** [1] такого випадкового процесу, яка описується формулою:

$$\xi_N^{(i)}(x) = \frac{\sqrt{b_0^{(i)} D_{\xi}^{(i)}} \xi_0^{(i)}}{2} + \sum_{k=1}^N \sqrt{2 b_k^{(i)} D_{\xi}^{(i)}} \left( \xi_k^{(i)} \cos \frac{\pi x}{T} + \eta_k^{(i)} \sin \frac{\pi x}{T} \right), \quad (3)$$

де змінна  $x$  належить інтервалу спостереження  $[0, T]$ ,  $D_{\xi}^{(i)}$  – дисперсія, а  $b_k^{(i)}$  – спектральні коефіцієнти, які відповідають підібраній кореляційній функції (2) та обчислюються за виразом

$$b_k^{(i)} = d_i \frac{e^{-h_i T}}{T} \left\{ \frac{h_i \left[ e^{h_i T} - \cos(T \omega_i + k \pi) \right] + \left( \omega_i + \frac{k \pi}{T} \right) \sin(T \omega_i + k \pi)}{h_i^2 + \left( \omega_i + \frac{k \pi}{T} \right)^2} + \right. \\ \left. + \frac{h_i \left[ e^{h_i T} - \cos(T \omega_i - k \pi) \right] + \left( \omega_i - \frac{k \pi}{T} \right) \sin(T \omega_i - k \pi)}{h_i^2 + \left( \omega_i - \frac{k \pi}{T} \right)^2} \right\},$$

де параметри  $h_i$ ,  $\omega_i$  та  $d_i = D_{\xi}^{(i)}$  задані в формулі (1).

Було проведено аналітичне дослідження залежності значень спектральних коефіцієнтів  $b_1^{(i)}$ ,  $b_2^{(i)}$ ,  $b_3^{(i)}$ , ...  $b_{10}^{(i)}$  (при  $N = 10$ ) кореляційної функції  $B_i(\rho)$  типу експоненціально затухаючої косинусоїди від величини параметра  $h_i > 0$ . На наступному рисунку (рис. 4) зображено графіки такої залежності, які побудовано засобами пакета програм MathCad.

Із наведеного графічного представлення неважко зробити висновок про достатню швидкість спадання значень спектральних коефіцієнтів із ростом їх номера  $k$  та зменшення їх різниці із збільшенням значення параметра  $h_i$ , (рис. 4). Такі властивості коефіцієнтів гарантують хорошу до застосування в сформульованому нижче алгоритмі збіжність ряду:

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k^{(i)}.$$

Модель (3) є основою для побудови наступного алгоритму статистичного моделювання реалізацій для стаціонарної випадкової складової  $\xi_i(x)$  даних аеромагнітної зйомки окремо по кожному профілю.

довано **модель** [1] такого випадкового процесу, яка описується формулою:

#### Алгоритм:

1. Для заданої точності  $\varepsilon$  ( $\sim 10^{-3}$ ) визначається відповідне натуральне число  $N$ , яке задовольняє таку нерівність [1]:

$$\sum_{k=N}^{\infty} b_k^{(i)} \leq \varepsilon.$$

2. Моделюються послідовності некорельованих гауссівських випадкових величин  $\{\xi_k^{(i)}, k = 0, 1, 2, \dots, N\}$

та  $\{\eta_k^{(i)}, k = 0, 1, 2, \dots, N\}$  з нульовим математичним сподіванням та одиничними дисперсіями.

3. Обчислюється значення реалізації випадкового процесу  $\xi_i(x)$  у заданій точці  $x$  із інтервалу спостережень за формулою (3), підставляючи в неї знайдену величину числа  $N$  та змодельовані послідовності випадкових величин за попереднім пунктом (рис. 5).

4. Знаходиться статистична оцінка для кореляційної функції по отриманій реалізації випадкового процесу  $\xi(x)$  допомогою пакета Statistica і порівнюється із заданою кореляційною функцією  $B(\rho)$ , а також проводиться статистичний аналіз цієї реалізації на адекватність.

При використанні наведеного алгоритму можна згенерувати реалізації для стаціонарної випадкової складової  $\xi(x)$  даних аеромагнітної зйомки окремо по кожному профілю, їх необхідно додати за формулою (1) до тренда  $f(x)$ , що описується формулою (2) і в результаті будемо мати реалізації  $\eta(x)$  для даних аеромагнітної

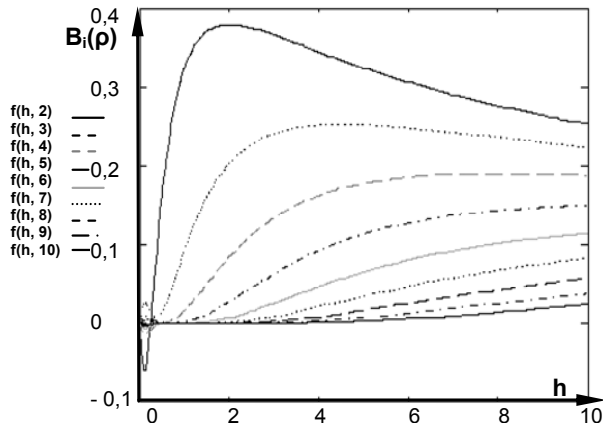


Рис. 4. Графічне відображення залежності спектральних коефіцієнтів  $b_k=f(h*k)$  кореляційної функції типу експоненціально затухаючої косинусоїди  $B_k(\rho)$  від параметру  $h$

#### Висновки.

За допомогою методів статистичного моделювання реалізацій випадкових процесів вирішена проблема у генеруванні адекватних даних аеромагнітної зйомки засобами комп'ютера, коли їх неможливо отримати на практиці із заданою детальністю в деяких ділянках. Наведений спосіб моделювання дозволяє із вказаною точністю отримувати значення даних, яких не вистачає, при умові, що результати вимірювань мають властивість стаціонарності, або коли їх можна звести до стаціонарної та детермінованої складових.

Область застосування наведеного алгоритму може бути розширена на класи випадкових процесів з іншим типом розподілу, якщо замість послідовностей гауссівських випадкових величин в моделі (3) розглядати послідовності з відповідним типом розподілу.

зйомки, окремо по кожному профілю у будь-якій точці із інтервалу спостережень (рис. 5).

В результаті накладання змодельованих реалізацій на дані вимірів по профілю отримаємо їх більш детальну реалізацію із достатньою точністю.

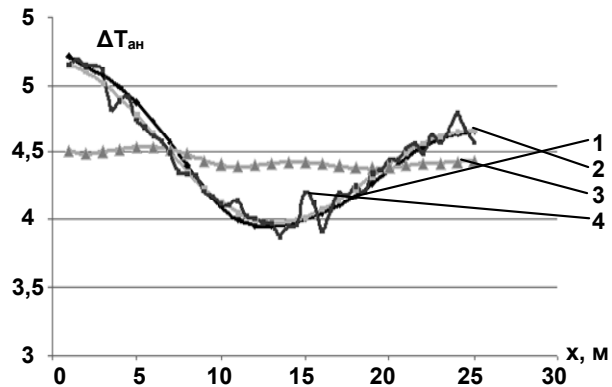


Рис. 5. Графік  $\Delta T_{ан}$  по ПР1 (прологорифмований), вхідні дані, тренд, змодельовані дані: 1 – вхідні дані, 2 – тренд, 3 – випадкова складова, 4 – змодельовані дані

1. Вишва З. О. Математичні моделі в природознавстві / З. О. Вишва. – К. : ВГЛ "Обрій", 2007. – 164 с.
2. Вишва С. А. Про один метод статистичного моделювання періодичних стаціонарних випадкових процесів при вирішенні геологічних задач / С.А. Вишва, З.О. Вишва // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. Геологія, 2000. – Вип.17. – С. 57–59.
3. Вишва С. А. Про один метод статистичного моделювання періодичних випадкових процесів в геології / С. А. Вишва, З. О. Вишва // Геоінформатика – К. : ТОВ "Карбон-сервіс", 2003. – № 1. – С. 46–52.
4. Вишва С. А. Статистичне моделювання карстово-суфозійних процесів на території потенційно-небезпечних об'єктів / С. А. Вишва, З. О. Вишва, В. К. Демидов // Геоінформатика – К. : ТОВ "Карбон-сервіс", 2004. – № 2. – С. 78–85.
5. Chiles J. P. Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty / J. P. Chiles, P. Delfiner. – N. Y., Toronto : John Wiley & Sons, Inc., 1999. – 695 p.
6. Mantoglou A. Simulation of random fields with turning bands method / A. Mantoglou, L. Wilson John // MIT Ralph M.Parsons Lab. Hydrol. And Water Syst. Rept., 1981. – №264. – 199 p.
7. Shinozuka M, Jan C. M. Digital simulation of random processes and its applications / M. Shinozuka, C. M. Jan // J. Sound and Vibration, 1972. – № 1. – P. 111–128.

Надійшла до редколегії 14.11.11