

УДК 550.831

П. Міненко, д-р фіз.-мат. наук,
Р. Міненко, магістр

ПОХІДНІ ДИСКРЕТНО ЗАДАНОГО ПОЛЯ В ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧАХ ГРАВІМЕТРІЇ ТА МАГНІТОМЕТРІЇ

(Рекомендовано членом редакційної колегії д-ром фіз.-мат. наук І.М. Корчагіним)

Досліджено проблему та встановлено межі надійного обчислення похідних дискретно заданого поля. Розроблено відповідні методичні прийоми, теоретичні методи та практичні рекомендації, що поліпшують якість розв'язку обернених задач гравіметрії і магнітометрії, у тому числі, з використанням кінцево-різницевої формул для вимірюваного та теоретичного поля.

The problem is considered and borders of reliable calculation of derivatives of discretely set field are established. Corresponding methodical receptions, theoretical methods and practical recommendations which improve quality of the decision of return problems gravimetr and magnetic, including, with use certainly-different formulas for the measured and theoretical field are developed.

Постановка проблеми. Розв'язок обернених задач (ОЗ) гравіметрії і магнітометрії ускладнюється відсутністю методів точного визначення постійного фону для поля сили тяжіння та напруженості магнітного поля. Але лінійний фон для них визначається доволі точно. І

тому важливим напрямком досліджень є використання для розв'язку ОЗ горизонтальних похідних поля.

Аналіз останніх досліджень. Ідея використання горизонтальних похідних поля для розв'язку ОЗ відома давно. Проте досі немає методів точного визначення

горизонтальних похідних дискретно заданого поля. Похибки часто досягають сотень відсотків (див. табл. 1), причому, у різних точках профілю вони суттєво відрізняються, що не може забезпечити стійкий розв'язок ОЗ. Разом із тим, при деяких параметрах збурюючих тіл, кроку визначення похідної та точності вимірювання поля результати розв'язку ОЗ є точними, стійкими та геологічно змістовними.

Виділення не вирішених раніше частин проблеми.

Як відомо, задача обчислення других похідних V_{xz} , V_{zz} гравітаційного потенціалу V по дискретно вимірюваним із кроком b значенням його першої похідної V_z є некоректною [1; 4]. Це обумовлено тим, що різниця значень поля у двох точках $dV_z(X_j) = V_z(X_j + b) - V_z(X_j - b)$ дорівнює $2bV_{xz}(X_j)$ лише в деяких точках X_j на профілі. В інших точках ми маємо в загальному вигляді нерівність

$$\begin{aligned} dV_z(X_j + \varepsilon_j) &= V_z(X_j + b) - V_z(X_j - b) = \\ &= 2bV_{xz}(X_j + \varepsilon_j) \neq 2bV_{xz}(X_j), \end{aligned} \quad (1)$$

де ε_j – невідомі величини.

Ця розбіжність часто приводить до великих помилок обчислення похідних та неправильного розв'язку ОЗ, що є недоліком методу, як для гравіметрії, так і для магнітометрії.

Формулювання цілей роботи. Установлення меж надійного обчислення похідних дискретно заданого поля й розробка відповідних методичних прийомів, теоретичних методів і практичних рекомендацій, що поліпшують якість розв'язку ОЗ гравіметрії і магнітометрії.

Виклад основного матеріалу. Утворимо відносну різницю правої й лівої частин рівняння (1) при $\varepsilon_j = 0$, підставивши в нього рішення прямої задачі для напівнескінченного стрижня,

$$\begin{aligned} \delta dV_z(X_j) / V_z(X_j) &= \\ &= (V_z(X_j + b) - V_z(X_j - b) - 2bV_{xz}(X_j)) / V_z(X_j); \end{aligned} \quad (2)$$

де

$$V_z(X_j) = \frac{k\sigma S}{R_{ij}}; \quad R_{ij}(X_j - X_i, h) = ((X_j - X_i)^2 + h^2)^{1/2}; \quad (3)$$

k – гравітаційна постійна; σ і S – аномальна щільність і площа перетину стрижня; $(X_i, 0, h)$ – координати точки верхнього торця стрижня.

Остаточно, з (2) одержимо:

$$\begin{aligned} \delta\left(\frac{dV_z(X_j)}{V_z(X_j)}\right) &= \\ &= \left(\frac{2b(X_j - X_i)}{(R_{ij}(X_j - X_i, h))^2} + \frac{R_{ij}(X_j - X_i, h)}{R_{ij}(X_j + b - X_i, h)} - \frac{R_{ij}(X_j - X_i, h)}{R_{ij}(X_j - b - X_i, h)} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Розділивши (4) на $2b$, обчислимо інтервали зміни модулів відносних погрішностей визначення похідної V_{xz} на профілі уздовж осі X при різному співвідношенні b/h (див. табл. 1). З табл. 1 видно, що тільки за рахунок кроку дискретизації b похідна V_{xz} обчислюється по абсолютно точних вимірах поля з дуже великими помилками в різних точках профілю спостережень. На цій підставі розглянута задача вважається некоректною.

Якщо в поле ще додати погрішності його виміру δ_{ij} в мілігалах (мгл), то максимальні помилки зростуть на $300\delta_{ij}/(kb/h)\%$. При точності зйомки 0,1 мгл для параметрів табл. 1, відповідно, одержимо добавки до погрішностей δ : 1,5; 2,3; 4,5; 9; 18 %.

Таблиця 1

Інтервали зміни модулів відносних погрішностей обчислення V_{xz} за дискретним значенням поля сили тяжіння

Відношення параметрів b/h	Модуль погрішності δ для моделі стрижня, у %	Модуль погрішності δ для моделі сфери, у %
3	10 – 272	50 – 570
2	10 – 156	40 – 340
1	1,0 – 42	5 – 100
0,5	0,5 – 7,5	1 – 18
0,25	0,1 – 1,0	0,1 – 2,6

Отже, при великому кроці дискретизації b , підвищенням точності зйомки або усередненням вимірюваних значень поля, істотно зменшити некоректність задачі обчислення похідної V_{xz} неможливо. При малому кроці b ця задача вирішується добре, а при середньому – задовільно. Тому має сенс використовувати усереднення поля або кусочну апроксимацію поля поліномом 4-го порядку, наприклад, на ділянці з 7 точок профілю. У цьому випадку постійний і лінійний члени полінома в кожній точці X_j мають вигляд:

$$a_{o,j} = (7m_j - n_j) / 21; \quad a_{1,j} = (397t_j - 49p_j) / (1512b); \quad (5)$$

де

$$m_j = \sum_{i=3}^{i=7} g_{j+i};$$

$$t_j = g_{j+1} - g_{j-1} + 2(g_{j+2} - g_{j-2}) + 3(g_{j+3} - g_{j-3});$$

$$n_j = g_{j+1} - g_{j-1} + 4(g_{j+2} - g_{j-2}) + 9(g_{j+3} - g_{j-3});$$

$$p_j = g_{j+1} - g_{j-1} + 8(g_{j+2} - g_{j-2}) + 27(g_{j+3} - g_{j-3});$$

Аналогічно, для 5 точок профілю одержимо

$$a_{o,j} = (3,4m_j - n_j) / 7; \quad a_{1,j} = (13t_j - 3,4p_j) / (14,4b); \quad (6)$$

де

$$m_j = \sum_{i=2}^{i=5} g_{j+i};$$

$$t_j = g_{j+1} - g_{j-1} + 2(g_{j+2} - g_{j-2});$$

$$n_j = g_{j+1} - g_{j-1} + 4(g_{j+2} - g_{j-2});$$

$$p_j = g_{j+1} - g_{j-1} + 8(g_{j+2} - g_{j-2});$$

Отримані по формулах (5)-(6) апроксимації можна повторити, наприклад, по формулах

$$a_{o,j,2} = (7m_j - n_j) / 21; \quad a_{1,j,2} = (13t_j - 3,4p_j) / (14,4b); \quad (7)$$

де

$$m_j = \sum_{i=2}^{i=5} a_{j+i};$$

$$t_j = a_{j+1} - a_{j-1} + 2(a_{j+2} - a_{j-2});$$

$$n_j = a_{j+1} - a_{j-1} + 4(a_{j+2} - a_{j-2});$$

$$p_j = a_{j+1} - a_{j-1} + 8(a_{j+2} - a_{j-2});$$

Для малих і середніх кроків дискретизації величина $a_{1,j,2}$ являє собою досить точне значення похідної V_{xz} (із помилкою до 3 %).

При великих параметрах b/h методи (5)-(7) непридатні. Однак, у цьому немає необхідності, оскільки, при малому впливі на V_{xz} погрешностей поля, у розв'язку ОЗ можна використовувати кінцево-різницева формулу

$$\begin{aligned} dV_z(X_j) &= g(X_j + b) - g(X_j) = \\ &= (\sigma_i, a_{ij}(X_j + d) - a_{ij}(X_j)), \end{aligned} \quad (8)$$

де σ_i – аномальна щільність (АЩ) блоків інтерпретаційної моделі (ІМ); $a_{ij}(X_j)$ – геометричні коефіцієнти розв'язку прямих задач гравіметрії.

Аналогічно розв'язується обернена задача для вертикального приросту поля

$$\begin{aligned} dV_z(X_j, Z_j) &= g(X_j, Z_j) - g(X_j, Z_j - H) = \\ &= (\sigma_i, a_{ij}(X_j, Z_j) - a_{ij}(X_j, Z_j - H)), \end{aligned} \quad (9)$$

де $g(X_j, Z_j - H)$ – поле сили тяжіння, перераховане нагору на висоту H .

У багатьох звітах, переданих іншим організаціям, замість карт поля сили тяжіння й каталогів пунктів виміру поля, наведені карти середнього вертикального гра-

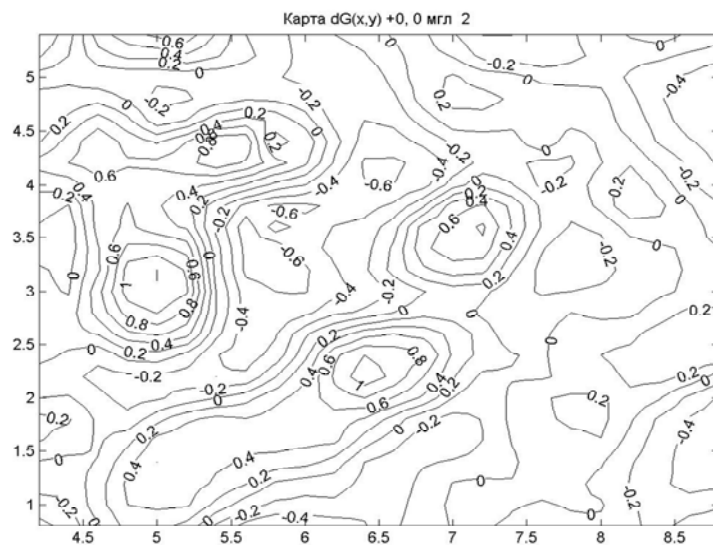
дієнта поля (9) або карти трансформацій Саксова-Ніггарда, різницева формула для яких має вигляд:

$$\begin{aligned} \delta g(X_j, Y_j) &= g(X_{j+2}, Y_j) - g(X_{j+1}, Y_j) + g(X_j, Y_{j+2}) - \\ &\quad - g(X_j, Y_{j+1}) + g(X_{j-2}, Y_j) - \\ &\quad - g(X_{j-1}, Y_j) + g(X_j, Y_{j-2}) - g(X_j, Y_{j-1}) = \\ &= (\sigma_i, a_{ij}(X_{j+2}, Y_j) - \\ &\quad - a_{ij}(X_{j+1}, Y_j) + a_{ij}(X_j, Y_{j+2}) - a_{ij}(X_j, Y_{j+1}) + \\ &\quad - a_{ij}(X_{j-2}, Y_j) - a_{ij}(X_{j-1}, Y_j) + a_{ij}(X_j, Y_{j-2}) - a_{ij}(X_j, Y_{j-1})). \end{aligned} \quad (10)$$

Обчислені по формулах (9)-(10) трансформанти поля мають високу розв'язувальну здатність при розв'язку ОЗ гравіметрії. По таких же схемах розв'язуються й ОЗ магнітометрії.

Апробація методів вирішення задачі виконана на прикладі рішення ОЗ гравіметрії по карті кінцево-різницевої трансформації поля сили тяжіння (рис. 1) Олександрівської ділянки Великого Кривбасу, обчислених по лівій частині формули (10).

На рис. 2 наведене рішення лінійної ОЗ по щільності блоків ІМ, відповідно до правої частини різницевої формули (10).



На рис. 3 і 4 наведені рішення нелінійної ОЗ по поглибинах до блоків ІМ, відповідно до правої частини тієї ж різницевої формули (10). Лінійна й нелінійна ОЗ виконані екстремальним методом спільного пошуку для кожного блоку ІМ на кожній ітерації АЩ і глибин розташування горизонтальних границь розділу блоків із найбільшим стрибком щільності [3, 4]. На карті поля (рис. 1), у її західній і центральній частині, перебувають дві інтенсивні позитивні аномалії з максимумами більше 1 *мгл*. Між позитивними аномаліями розташована негативна аномалія з мінімумом -0,6 *мгл*. Загальна область усіх трьох аномалій облямована, відповідно до властивостей розподілу поля трансформанти, мінімумом -0,2 *мгл*. Поле східної частини карти представлено мозаїкою локальних аномалій із екстремумами від -0,4 до

0,2 *мгл*. Інтерпретуючи поле якісно, можна припустити наявність блоків із високою позитивною й негативною аномальною щільністю. Однак, за результатами кількісної інтерпретації (рис. 2 і 3) установлено, що західна й центральна аномалії з максимумами більше 1 *мгл* здебільшого створені виступами на 20 м корінних гірських порід кристалічного фундаменту, хоча вони мають більш високу АЩ – від 0,04 до 0,11 *г/см³*. Між виступами знаходиться западина з гірськими породами більш низької АЩ від -0,04 до -0,06 *г/см³*. Більше того, глибина западини досягає 215-265 м (рис. 4). Але АЩ гірських порід тут практично не змінюються із глибиною, хоча під виступом вона помітно зростає до 0,14 – 0,16 *г/см³* на глибині 265 м (карта щільності третього шару в статті не наведена).

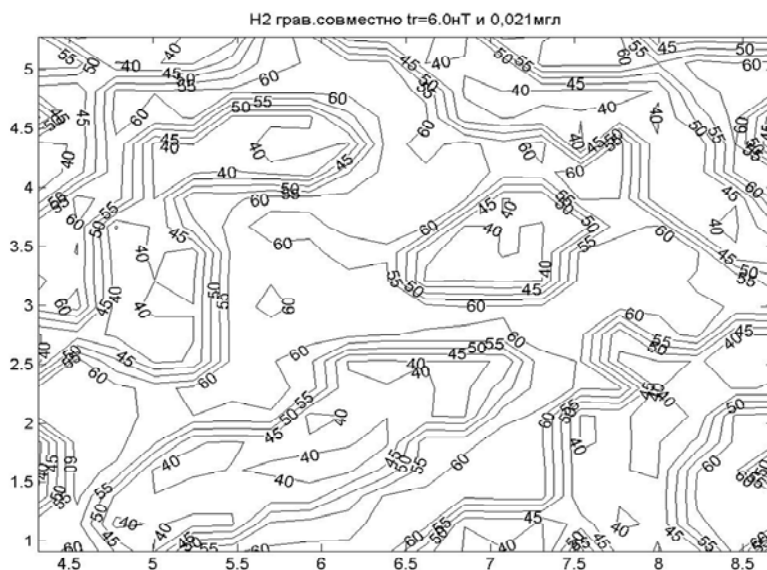


Рис. 3. Результати рішення нелінійної оберненої задачі гравіметрії: карта ізоліній глибин верхньої поверхні 2-го шару ІМ (у м)

Центральний виступ зі сходу облямований западиною глибиною 165-215 м (рис. 3 і 4) із майже нульовою АЩ (рис. 2). По краях карти виявлено декілька вузько-локальних западин глибиною від 165 до 315 м з АЩ від -0,04 до -0,12 *г/см³*. Таким чином, використання кінцево-різницевої трансформації поля (9)-(10), звільнених від

впливу постійного фону, дозволяє більш точно виконати розв'язки обернених задач відомими методами. Однак, робиться це за рахунок збільшення від 2 до 8 разів витрат часу на обчислення. Для наведених обернених задач користь від підвищення якості їхніх розв'язків істотно вище, ніж від економії витрат комп'ютерного часу.

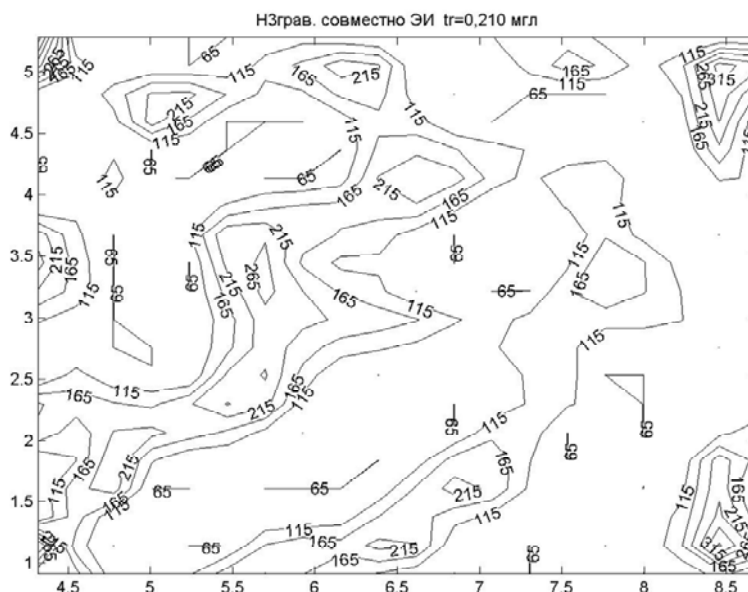


Рис. 4. Результати рішення нелінійної оберненої задачі гравіметрії: карта ізоліній глибин верхньої поверхні 3-го шару ІМ (у м)

Висновки. 1. Оборнені задачі гравімагнітометрії необхідно вирішувати по кінцево-різницевиx формулах із використанням вимірюваних значень поля.

2. Оборнені задачі гравімагнітометрії варто вирішувати екстремальними методами одночасного пошуку на одній і тій же ітерації глибин і найбільших стрибків фізичного параметра на границях блоків інтерпретаційної моделі.

Перспективи подальших розвідок. Варто розширити пошуки нових кінцево-різницевиx трансформацій

поля, більш ефективних по витратах комп'ютерного часу, але таких, які не знижують якості рішення ОЗ.

1. *Лаврентьев М.М.* О некоторых некорректных задачах математической физики. – Новосибирск, 1962. 2. *Миненко П.А., Миненко Р.В.* О поисках избирательных экстремальных решений обратной задачи магнитометрии при исследованиях на кристаллическом фундаменте // Науковий вісник НГУ. – Днепропетровск, 2006. – № 9. – С. 39-44. 3. *Миненко П.А.* Методы и критерии оптимизации устойчивых решений обратной задачи глубинной морской гравиметрии // Науковий вісник НГУ. – Днепропетровск, 2007. – № 11. – С. 83-91. 4. *Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.* Методы решения некорректных задач. – М., 1979.

Надійшла до редколегії 09.11.12