

УДК 550.334

Д. Малицький, д-р фіз.-мат. наук, ст. наук. співроб.,
О. Муйла, канд. фіз.-мат. наук, пров. інж., А. Павлова, асп.

МАТРИЧНИЙ МЕТОД У ЗАДАЧАХ СЕЙСМОЛОГІЇ

(Рекомендовано членом редакційної колегії д-ром фіз.-мат. наук, проф. Г.Т. Продайводою)

У роботі представлено рішення прямої задачі для поля переміщень на вільній поверхні шаруватого ізоотропного середовища з використанням матричного методу. Результати прямої задачі використано для визначення тензора сейсмічного моменту. Показано використання методу матричного пропагатора для анізотропного середовища.

The solution of the direct problem for the displacement field on the free surface of layered isotropic medium using the matrix method is presented. The results of the direct problem are used to determine the seismic moment tensor. The application of the method of matrix propagator for the anisotropic medium is shown.

Пряма задача. Розглядається поширення сейсмічних хвиль у вертикально-неоднорідному середовищі, яке моделюється системою однорідних ізоотропних n шарів на $(n+1)$ півпросторі. Вважаємо, що границі між шарами є паралельні. На кожній границі виконуються умови жорсткого контакту. Хвилі з $(n+1)$ півпростору не повертаються (умова випромінювання). В однорідному ізоотропному шарі на глибині H_s на деякій уявній границі розміщене джерело, представлене тензором сейсмічного моменту M_{ij} , який залежить від орієнтації розриву і від енергії в джерелі. Вважаємо, що середовище може бути анізотропним [5, 6].

Використовуючи матричний метод Томсона-Хаскела та інтегральні перетворення Фур'є-Бесселя-Мелліна отримано поле переміщення на вільній поверхні шаруватого середовища в далекій зоні (в циліндричній системі координат), враховуючи умову випромінювання і відсутності напружень на денній поверхні [3]:

$$\begin{pmatrix} u_z^{(0)} \\ u_r^{(0)} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \int_0^\infty k^2 \mathbf{I}_i L^{-1} [M_i g_i] dk, \\ u_\phi^{(0)} = \sum_{i=5}^6 \int_0^\infty k^2 J_i L^{-1} [M_i g_{i\phi}] dk \quad (1)$$

$$\text{де } \mathbf{I}_1 = \begin{pmatrix} J_1 & 0 \\ 0 & J_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} J_0 & 0 \\ 0 & J_1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{I}_3 = \mathbf{I}_2 \quad g_i = \begin{pmatrix} g_{iz} \\ g_{ir} \end{pmatrix},$$

$J_5 = J_0$, $J_6 = J_1$, $L^{-1}[k\eta]$ – обернене перетворення Лапласа; J_1, J_0 – функції Бесселя, k – хвильове число; η – змінна Мелліна; M_i – компоненти сейсмічного тензора.

Для тестування коректності розв'язку прямої задачі використовувались результати групи вчених, які входять до проекту Source Inversion Validation (SIV). Для відомого середовища моделювались синтетичні сейсмограми різними методами (рис. 1). Внизу наведено результат, отриманий за даною методикою. На рис. 1 синтетичні сейсмограми отримані за допомогою восьми методів для моделі середовища: дев'ять шарів на півпросторі, коли джерело сейсмічних хвиль розміщено на глибині

10 км, а часова функція у вогнищі є П-імпульс протяжністю 0,2 с. Порівняльний аналіз синтетичних сейсмограм показує, що запропонована авторами модифікація матричного методу для визначення поля переміщень на вільній поверхні шаруватого півпростору може бути використана для моделювання хвильових полів.

Обернена задача. В сучасній сейсмології задачам визначення параметрів вогнища приділяють менше уваги, ніж характеристикам середовища. Однак, вони є важливими для розуміння фізичних процесів у вогнищі, оскільки, неможливо без визначення, інтерпретації та аналізу параметрів вогнища розв'язувати актуальні задачі інженерній сейсмології чи інші проблеми. Тому, розроблення нових методик та алгоритмів для обернених задач сейсмології щодо джерела залишаються актуальними і надзвичайно важливими завданнями. На даний час, не має загального та надійного підходу для вирішення таких задач, тому, що неможливо врахувати всі складні ефекти при моделюванні хвильових процесів під час поширення сейсмічних хвиль в неоднорідних середовищах. Для спрощення цієї проблеми пропонується корисну інформацію про вогнище землетрусу шукати в прямих Р і S-хвилях, виділяючи із повного хвильового поля ту частину, яка відповідає за поширення тільки цих хвиль, тобто вектор $\mathbf{U}_s^{(0)}$. Дана методика дозволяє розглядати джерело розподіленням в часі та, визначати часову функцію вогнища STF. Отже, сейсмічний тензор у спектральній області знайдемо із рівняння [2]:

$$\mathbf{U}_s^{(0)} = (U_s^{(0)p}, U_s^{(0)s}, U_y^{(0)p}, U_y^{(0)s}, U_z^{(0)p}, U_z^{(0)s})^T = \mathbf{K} \cdot \mathbf{M} \quad (2)$$

де матриця $\mathbf{K}$ містить фізичні параметри середовища, тобто швидкості поширення Р та S хвиль, а також густини кожного шару.

Маємо систему шести алгебраїчних рівнянь із шістьма невідомими, що є компонентами тензора сейсмічного моменту M_{ij} ($ij=xz, yz, zz, xx, yy, xy$). Із нього отримаємо компоненти тензора сейсмічного моменту:

$$\mathbf{M} = \mathbf{K}^{-1} \cdot \mathbf{U}_s^{(0)}, \quad (3)$$

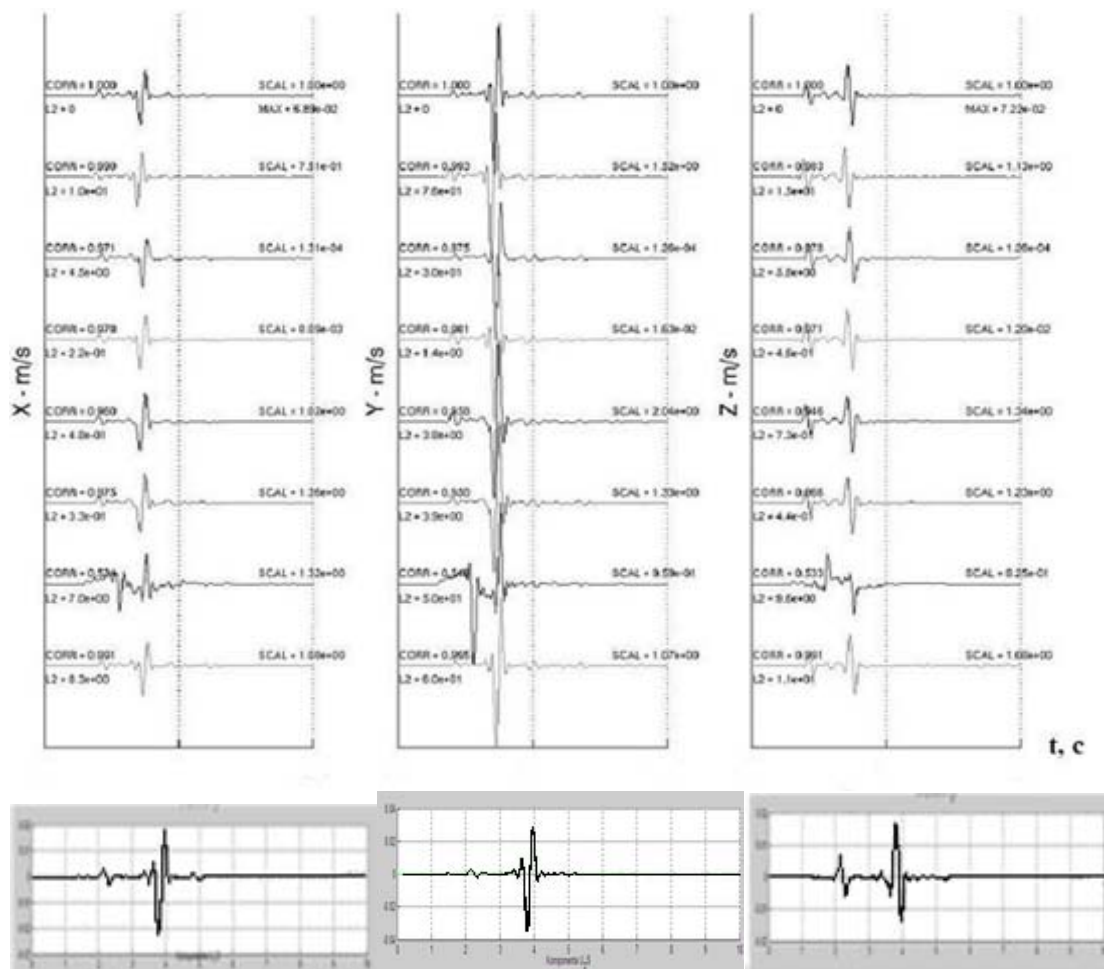


Рис. 1. Компоненти швидкості переміщень на вільній поверхні середовища обчислені різними методами згідно з проектом SIV та запропонованою авторами модифікацією матричного методу

У випадку N станцій вираз (2) запишемо у вигляді:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_1 \mathbf{M} &= \mathbf{U}_{S1}^{(0)} \\ \mathbf{K}_2 \mathbf{M} &= \mathbf{U}_{S2}^{(0)} \\ &\dots \end{aligned} \quad (4)$$

$$\mathbf{K}_N \mathbf{M} = \mathbf{U}_{SN}^{(0)}$$

Дана система матричних рівнянь (4) є перевизначеною. Її перепишемо у вигляді:

$$\mathbf{G} \mathbf{M} = \mathbf{U}_S^{(0)}, \quad (5)$$

Помноживши зліва і справа вираз (5) на матрицю $\tilde{\mathbf{G}}^*$, яка по відношенню до матриці $\mathbf{G}$ є комплексно-спряженою і транспонованою отримаємо:

$$\tilde{\mathbf{G}}^* \mathbf{G} \mathbf{M} = \tilde{\mathbf{G}}^* \mathbf{U}_S^{(0)}. \quad (6)$$

або

$$\mathbf{M} = (\tilde{\mathbf{G}}^* \mathbf{G})^{-1} \tilde{\mathbf{G}}^* \mathbf{U}_S^{(0)}. \quad (7)$$

Вираз (7) для тензора $\mathbf{M}$ будемо називати розв'язком узагальненої оберненої задачі в сенсі середньоквадратичного, при якому мінімізується норма:

$$\|\mathbf{U}_S^{(0)} - \mathbf{G} \mathbf{M}\|^2. \quad (8)$$

Таким чином, отримано рішення оберненої задачі для сейсмічного тензора, якщо відома швидкісна модель середовища. Покажемо використання узагальненого розв'язку (7) на такому тестовому прикладі: задамо середовище у вигляді двох шарів на півпросторі, джерело розміщене на глибині $h_s = 5000$ м (параметри другого і третього шарів рівні між собою). Тензор сейсмічного моменту задано у вигляді:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 5,0 & -1,4 & -7,0 \\ -1,4 & 4,52 & -8,3 \\ -7,0 & -8,3 & -9,52 \end{pmatrix} * 10^{14} \text{ Н*м} \quad (9)$$

Часову функцію у вогнищі $\text{STF}(t)$ задано у вигляді затухаючої синусоїди (рис. 2 а). Компоненти сейсмічного тензора як функції часу представлено на рис. 2 б.

Розв'язок оберненої задачі (7) за розробленою методикою (рис. 2 в) отримано для значень вектора $\mathbf{U}_S^{(0)}$,

які беруться із сейсмічних записів $u_z^{(0)}(r, z, \phi, t)$,

$u_r^{(0)}(r, z, \phi, t)$, $u_\phi^{(0)}(r, z, \phi, t)$ шляхом виділення на кожній компоненті прямих P і S -хвиль. Практично це означає, що ми беремо на сейсмограмі частину запису від вступу прямої P хвилі до її першого перетину із віссю часу. Аналогічно поступаємо із прямою S -хвилею.

Показано, що вибір вектора $\mathbf{U}_S^{(0)}$ тісно пов'язаний із часом у вогнищі. Якщо вибрати протяжність у часі для прямих P і S -хвиль достатньо меншою або достатньо більшою від часу у вогнищі, то отримаємо негативний результат для сейсмічного моменту. Найкращий результат отримано, коли час, протягом якого відбувалася подія є співрозмірним із часовим діапазоном для $\mathbf{U}_S^{(0)}$. Важливим для розв'язання оберненої задачі є мати добрі сейсмічні записи, а також на якість результатів оберненої задачі впливає вибір швидкісної моделі.

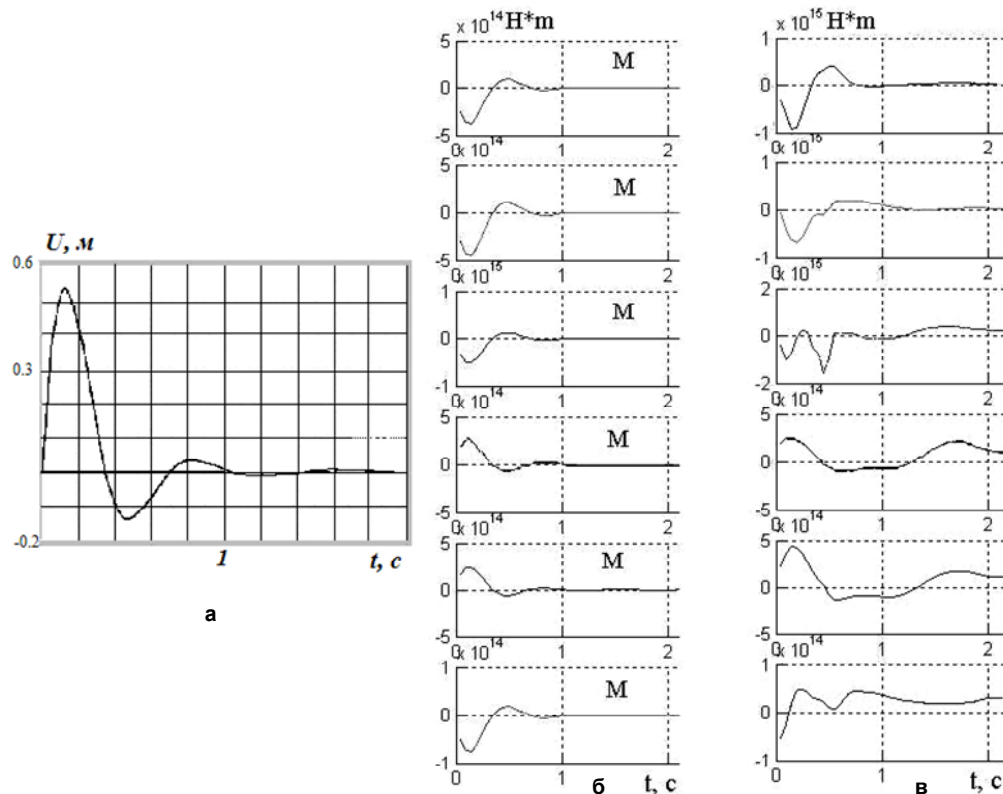


Рис. 2. Часова функція вогнища STF:

а – компоненти тензора сейсмічного моменту як функції часу; б – пряма задача, в – обернена задача

Анізотропне середовище. У загальному випадку розглянемо поширення сейсмічних хвиль в анізотропному неоднорідному середовищі. На практиці показано [5], що анізотропія може мати достатньо суттєвий вплив на розподіл поля переміщень – напружень на вільній поверхні шаруватого півпростору. А це означає, що дослідження такого впливу є важливим для визначення параметрів вогнища землетрусу. У даній роботі ми обмежимося лише рішенням прямої задачі.

Отже, для поширення сейсмічних хвиль в шаруватому анізотропному середовищі запишемо закон Гука і рівняння руху для кожного шару у вигляді:

$$\tau_{ij} = c_{ijkl} e_{kl} = c_{ijkl} u_{k,l} \quad (10)$$

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \rho u_{i,t} = \tau_{ij,j} \quad (11)$$

Перетворення Фур'є для довільної функції g має вигляд:

$$g(p_x, p_y, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{-\infty}^{\infty} dy \int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot g(x, y, t) e^{j\omega(t - xp_x - yp_y)} \quad (12)$$

де p_x, p_y – горизонтальні повільності.

Якщо застосувати перетворення (12) до співвідношень (10) і (11), отримаємо рівняння [6]:

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial z} = j\omega A(z) b(z), \quad (13)$$

де $\bar{b} = \begin{pmatrix} u \\ \tau \end{pmatrix}$, $u = (u_x, u_y, u_z)^T$,

$$\tau = -\frac{1}{j\omega} (\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz})^T. \quad (14)$$

$$A = \begin{pmatrix} T & C \\ S & T^T \end{pmatrix}. \quad (15)$$

де матриці T, S, C мають розмірність 3×3 , причому C і S є симетричними; u_x, u_y, u_z – компоненти переміщень і $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \tau_{zz}$ – z – компоненти тензора напружень.

Для розв'язання рівняння (13) використовуємо метод матричного пропагатора [6]:

$$P(z, z_0) = I + \int_{z_0}^z A(\xi_1) d\xi_1 + \int_{z_0}^z A(\xi_1) \int_{z_0}^{\xi_1} A(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1. \quad (16)$$

Матричний пропагатор задовольняє диференціальному рівнянню (13):

$$\frac{d}{dz} P(z, z_0) = j\omega A(z) P(z, z_0). \quad (17)$$

Однією із властивостей матричного пропагатора $P(z, z_0)$ є те, що він породжує вектор переміщень-напружень $b(z)$ на глибині z , діючи на цей вектор на глибині z_0 . Якщо ввести джерело у вигляді довільно-орієнтованої сили, яке розміщене на довільній глибині однорідного анізотропного півпростору, то легко показати, що рівняння для поля переміщень-напружень матиме вигляд [6]:

$$\frac{\partial \bar{b}}{\partial z} = j\omega A \bar{b} - \frac{j}{\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix}, \quad (18)$$

де $\bar{F} = -\frac{1}{j\omega} \begin{pmatrix} 0 \\ f \end{pmatrix} = -\frac{1}{j\omega} (0, 0, 0, f_x, f_y, f_z)^T$.

З використанням методу матричного пропагатора, розв'язок рівняння (18) має вигляд:

$$b(z) = P(z, z_0) b(z_0) + \int_{z_0}^z P(z, \xi) F(\xi) d\xi \quad (19)$$

Таким чином, маючи значення для матричного пропагатора і компоненти сили, які породжують сейсмічні хвилі, можна визначити значення поля переміщень на довільній глибині, в тому числі на вільній поверхні ані-

зотропного середовища. Важливим є отримання рішення прямої задачі у випадку дії джерела у вигляді тензора сейсмічного моменту в анізотропному середовищі. Але цей випадок буде представлено в наступних публікаціях. В даній роботі приведено результати наших обчислень, коли один із шарів знаходиться під додатковим напруженням, наприклад, під всестороннім стиском [6]. Вважаємо, що такий шар є розміщеним нижче джерела сейсмічних хвиль. На рис. 3 показано, що навіть для такого простого випадку відхилення від ізоτροпії в одному із шарів, такий вплив проявляється на обмінних хвилях для різних значень гідростатичного стиску.

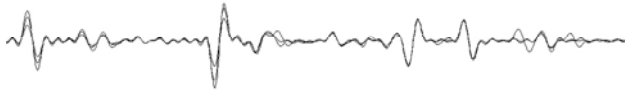


Рис. 3. Обмінні хвилі для різних значень гідростатичного стиску: $P = 0 \text{ MPa}, 8 \text{ MPa}, 15 \text{ MPa}$

Таким чином, анізотропія може мати суттєвий вплив на характер хвильового поля, яке отримано за допомогою матричного методу. Цей вплив проявився при визначенні сейсмічного моменту. У наступних публікаціях буде показано, як отримано узагальнений розв'язок (7) у випадку анізотропного середовища.

1. Аки К., Річардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы. – М., 1983. – Т. 1, 2. 2. Малицький Д.В.. Аналітично-числові підходи до обчислення часової залежності компонент тензора сейсмічного моменту // Геоінформатика. – 2010. – Т. 1. – С. 79–86. 3. Малицький Д.В., Муйла О.О. Про застосування матричного методу і його модифікацій для дослідження поширення сейсмічних хвиль у шаруватому середовищі // Теоретичні та прикладні аспекти геоінформатики. – К., 2007. – С. 124–136. 4. Молотков Л.А. Матричний метод в теорії розповсюдження волн в слоистых упругих и жидких средах. – Л., 1984. 5. Chekurin V., Malytsky D. Mathematical model for interference of elastic waves in a geological medium with a stressed layer. The case of uniform compression // Physics and mathematical modeling and informational technology. – 2011. – V. 14. – P. 159–166. 6. Fryer G.J., Frazer L.N. Seismic waves in stratified anisotropic media II – elastodynamic eigensolutions for some anisotropic systems // Geophys.J. R. Astr. Soc. – 1987. – V. 91, I. 73. – P. 101.

Надійшла до редколегії 30.10.12