

УДК 550.834

В. Роганов, мол. наук. співроб.

МОДЕЛЮВАННЯ ХВИЛЬОВИХ ПОЛІВ В АНІЗОТРОПНИХ СЕРЕДОВИЩАХ МАТРИЧНИМ МЕТОДОМ

(Рекомендовано членом редакційної колегії д-ром фіз.-мат. наук, проф. Г.Т. Продайводою)

Пропонується стійкий метод обчислення трьохкомпонентних хвильових полів для горизонтально-шаруватого анізотропного середовища з поглинанням на основі використання дельта-операторів, шестивимірного формалізму Строу й матричного методу Хаскела-Томсона.

A stable method for calculating three-component three-dimensional fields of reflected and transmitted waves in a horizontally layered anisotropic anelastic medium is derived. It used delta-operators, the six-dimensional Stroh formalism and Haskell-Thomson matrix method.

Вступ. Розрахунок коефіцієнтів відбиття й проходу для ізотропного горизонтально-шаруватого середовища на основі матричного методу запропонували В. Томсон [5] і Н. Хаскел [3]. А. Строу [4] і С. Кремппін [1] показали, що для анізотропного середовища для цієї мети можна використати шестивимірний формалізм. Однак, матричному методу властива нестабільність, пов'язана з необхідністю розрахунку мінорів погано обумовлених матриць-пропагаторів. І. Данкін [2] показав, як, використовуючи дельта-оператори, збільшити точність розрахунків стосовно до ізотропного середовища. У цій роботі метод дельта-операторів узагальнений для багат шарових анізотропних середовищ із поглинанням і застосований для формування полів відбитих і заломлених хвиль.

Теорія. Розглянемо середовище, що складається з півпросторів 0 і $(n+1)$, між якими знаходяться n шарів з потужностями h_i ($i=1, \dots, n$) і плоскими горизонтальними границями поділу. Позначимо їх щільності й параметри пружності відповідно $\rho^{(i)}$ й $\lambda_{mp,nq}^{(i)}$ ($i=0, \dots, n+1$). Півпростори й шари можуть бути анізотропними. Передбачається, що шари перебувають у жорсткому контакті.

Позначимо $z_i = h_0 + \dots + h_{i-1}$ – глибину залягання верхньої границі i -го шару. Відповідно до методу Хаскела-Томсона, хвильові поля зсувів-напруг $\mathbf{f}(z_i)$ і $\mathbf{f}(z_{n+1})$ на границях між півпросторами зв'язані рівністю

$\mathbf{f}(z_{n+1}) = \mathbf{P}\mathbf{f}(z_1)$, де $\mathbf{P} = \exp\{j\omega h_n \mathbf{M}^{(n)}\} \dots \exp\{j\omega h_1 \mathbf{M}^{(1)}\}$ – шестивимірна матриця-пропагатор пачки шарів,

$$\mathbf{M}^{(i)} = -\begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(i)} & \mathbf{C}_{33}^{(i)-1} \\ \mathbf{B}^{(i)} & \mathbf{A}^{(i)T} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A}^{(i)} = \mathbf{C}_{33}^{(i)-1} (s_1 \mathbf{C}_{31}^{(i)} + s_2 \mathbf{C}_{32}^{(i)}),$$

$$\mathbf{B}^{(i)} = \sum_{p,q=1,2} s_p s_q (\mathbf{C}_{p3}^{(i)} \mathbf{C}_{33}^{(i)-1} \mathbf{C}_{3q}^{(i)} - \mathbf{C}_{pq}^{(i)}) + \rho^{(i)} \mathbf{I}. \quad (1)$$

Якщо позначити $\mathbf{E}^{(i)} = (\mathbf{v}_\alpha^{(i)})$, $\Lambda^{(i)} = \text{diag}\{\exp(j\omega s_\alpha^{(i)} h_i)\}$, де $(\mathbf{v}_\alpha^{(i)}, s_\alpha^{(i)})$ – сукупність власних пар матриці $\mathbf{M}^{(i)}$, то матрицю $\mathbf{P}$ можна представити у вигляді $\mathbf{P} = \mathbf{E}^{(n)} \Lambda^{(n)} \mathbf{E}^{(n)-1} \dots \mathbf{E}^{(1)} \Lambda^{(1)} \mathbf{E}^{(1)-1}$. Отже, амплітуди $\mathbf{b}^{(0)}$ й $\mathbf{b}^{(n+1)}$ плоских хвиль різних типів, що поширюються в 0-м і $(n+1)$ -м півпросторах зв'язані рівністю $\mathbf{b}^{(n+1)} = \mathbf{Q}\mathbf{b}^{(0)}$, де $\mathbf{Q} = \mathbf{E}^{(n+1)-1} \mathbf{P} \mathbf{E}^{(0)} = \mathbf{E}^{(n+1)-1} \mathbf{E}^{(n)} \Lambda^{(n)} \dots \Lambda^{(1)} \mathbf{E}^{(1)-1} \mathbf{E}^{(0)}$.

Представимо матрицю $\mathbf{Q}$ в блоковому виді, розбивши її на 3×3 -підматриці, $\mathbf{Q} = (\mathbf{Q}_{ij})_{ij=1,2}$. Вектори амплітуд $\mathbf{b}^{(0)}$ і $\mathbf{b}^{(n+1)}$ також розіб'ємо на трикомпонентні підвектори, що відповідають спадним і висхідним хвилям різних типів. У цих позначеннях справедливі рівності:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{down}^{(n+1)} \\ \mathbf{b}_{up}^{(n+1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{down}^{(0)} \\ \mathbf{b}_{up}^{(0)} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{b}_{down}^{(n+1)} \\ \mathbf{b}_{up}^{(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{S}_{11} & \mathbf{S}_{12} \\ \mathbf{S}_{21} & \mathbf{S}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{down}^{(0)} \\ \mathbf{b}_{up}^{(n+1)} \end{pmatrix}, \quad (2)$$

де $\mathbf{b}^{(i)} = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_{down}^{(i)} \\ \mathbf{b}_{up}^{(i)} \end{pmatrix}$, $\mathbf{S}_{11} = \mathbf{Q}_{11} - \mathbf{Q}_{12} \mathbf{Q}_{22}^{-1} \mathbf{Q}_{21}$, $\mathbf{S}_{12} = \mathbf{Q}_{12} \mathbf{Q}_{22}^{-1}$,
 $\mathbf{S}_{21} = -\mathbf{Q}_{22}^{-1} \mathbf{Q}_{21}$, $\mathbf{S}_{22} = \mathbf{Q}_{22}^{-1}$.

Матриця розсіювання $\mathbf{S} = (\mathbf{S}_{ij})_{ij=1,2}$ містить коефіцієнти проходження й відбиття всіх типів хвиль, що поширюються вгору й вниз. Зокрема матриці $\mathbf{S}_{11}$ й $\mathbf{S}_{21}$ містять відповідно коефіцієнти заломлення й відбиття для пачки шарів при падінні плоскої хвилі з верхнього півпростору. Позначимо $\Delta_{i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_m} = \det(q_{ij})$ – мінор порядку m матриці $\mathbf{Q}$. Тут $1 \leq i_1, j_1 \leq \dots \leq i_m, j_m \leq 6$, $i = i_1, \dots, i_m$, $j = j_1, \dots, j_m$. Скориставшись співвідношеннями $\mathbf{S}_{11} = \mathbf{Q}_{11} - \mathbf{Q}_{12} \mathbf{Q}_{22}^{-1} \mathbf{Q}_{21} = \mathbf{Q}_{11} + \mathbf{Q}_{12} \mathbf{S}_{21}$, $\mathbf{Q}_{22} \mathbf{S}_{21} = -\mathbf{Q}_{21}$, $\mathbf{S}_{21} = (k_{i+3,j})_{i,j=1,\dots,3}$, одержимо формули для коефіцієнтів заломлення і відбиття:

$$k_{ij} = \frac{\Delta_{456,j456}}{\Delta_{456,456}}, \quad k_{4j} = -\frac{\Delta_{456,j56}}{\Delta_{456,456}}, \quad k_{5j} = \frac{\Delta_{456,j46}}{\Delta_{456,456}},$$

$$k_{6j} = -\frac{\Delta_{456,j45}}{\Delta_{456,456}}, \quad (1 \leq i, j \leq 3). \quad (3)$$

Слід зазначити, що замість використання матриці $\mathbf{Q}$ можна скористатися зворотною матрицею $\mathbf{R} = \mathbf{Q}^{-1} = \Lambda^{(0)-1} \mathbf{E}^{(0)-1} \mathbf{E}^{(1)} \Lambda^{(1)-1} \dots \Lambda^{(n)-1} \mathbf{E}^{(n)-1} \mathbf{E}^{(n+1)} \Lambda^{(n+1)-1}$, представивши її в блоковому виді $\mathbf{R} = (\mathbf{R}_{ij})_{i,j=1,\dots,2}$. Якщо позначити $\tilde{\Delta}_{i_1 \dots i_m, j_1 \dots j_m}$ мінор порядку m матриці $\mathbf{R}$, то мо-

$$\Delta_k(\mathbf{Q}) = \Delta_k(\Lambda^{(n+1)}) \Delta_k(\mathbf{E}^{(n+1)-1} \mathbf{E}^{(n)}) \cdot \Delta_k(\Lambda^{(n)}) \dots \Delta_k(\Lambda^{(1)}) \cdot \Delta_k(\mathbf{E}^{(1)-1} \mathbf{E}^{(0)}) \Delta_k(\Lambda^{(0)}), \quad (5)$$

$$\Delta_k(\mathbf{R}) = \Delta_k(\Lambda^{(0)-1}) \Delta_k(\mathbf{E}^{(0)-1} \mathbf{E}^{(1)}) \cdot \Delta_k(\Lambda^{(1)-1}) \dots \Delta_k(\Lambda^{(n)-1}) \cdot \Delta_k(\mathbf{E}^{(n)-1} \mathbf{E}^{(n+1)}) \Delta_k(\Lambda^{(n+1)-1}). \quad (6)$$

Кожна Δ_k -матриця з правої частини рівностей (5), (6) обчислюється окремо, а потім вони перемножуються. Точність обчислень підвищується у зв'язку з тим, що погано обумовлені лише матриці $\Lambda^{(i)}$. Однак, вони діагональні й при обчисленні їх Δ_k -матриць (тобто мінорів матриці $\Lambda^{(i)}$), операцій додавання виконувати не потрібно. Застосування Δ_k -оператора до обчислення коефі-

жна показати, що справедливі формули для матриці $\mathbf{S}_{11}$, елементами якої є коефіцієнти заломлення, а також формули для коефіцієнтів відбиття ($4 \leq i \leq 6$):

$$\mathbf{S}_{11} = \frac{1}{\tilde{\Delta}_{123,123}} \begin{pmatrix} \tilde{\Delta}_{23,23} & -\tilde{\Delta}_{13,23} & \tilde{\Delta}_{12,23} \\ -\tilde{\Delta}_{23,13} & \tilde{\Delta}_{13,13} & -\tilde{\Delta}_{12,13} \\ \tilde{\Delta}_{23,12} & -\tilde{\Delta}_{13,12} & \tilde{\Delta}_{12,12} \end{pmatrix}, \quad k_{i1} = \frac{\tilde{\Delta}_{23i,123}}{\tilde{\Delta}_{123,123}},$$

$$k_{i2} = -\frac{\tilde{\Delta}_{13i,123}}{\tilde{\Delta}_{123,123}}, \quad k_{i3} = \frac{\tilde{\Delta}_{12i,123}}{\tilde{\Delta}_{123,123}} \quad (4)$$

На жаль, при використанні формул (3), (4) в області кутів і частот, де присутні неоднорідні хвилі, а також при наявності поглинання в шарах, виникають великі помилки. Зниження точності при обчисленні мінорів відбувається у зв'язку з поганою обумовленістю відповідних підматриць.

Для підвищення стабільності розрахунку коефіцієнтів заломлення й відбиття І. Данкін [2] запропонував використати метод Δ_k – матриць. У даній статті цей метод узагальнений на шестивимірний формалізм і застосований для анізотропних середовищ. Суть методу полягає в тому, що кожній квадратній матриці розміру $n \times n$ можна поставити в відповідність квадратну матрицю розміру $m \times m$ ($m = C_n^k$), елементами якої є всі $k \times k$ -мінори ($k \leq n$) при довільному, але фіксованому їхньому впорядкуванні. Застосовуючи Δ_k -оператор до формул для розрахунку пропегаторів $\mathbf{Q}$ і $\mathbf{R}$, одержимо, що

цієнтів відбиття й заломлення складається в заміні мінорів у формулах (3), (4) на відповідні розраховані елементи матриць $\Delta_3(\mathbf{Q})$, $\Delta_4(\mathbf{Q})$, $\Delta_2(\mathbf{R})$, $\Delta_3(\mathbf{R})$.

Дисперсія швидкостей і присутність поглинання враховуються завданням комплексних швидкостей для різних типів хвиль, що поширюються в середовищі, відповідно до формули

$$v(\omega) = v_0 \left(1 + \frac{1}{\pi Q} \ln \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \right) \left(1 + \frac{j}{2Q} \right)^{-1}, \quad (7)$$

де ω_0 – центральна частота сигналу, v_0 – швидкість хвилі при частоті ω_0 , Q – добротність. Параметри v_0 і Q можуть бути різними для різних типів хвиль. Для коректного визначення коефіцієнтів відбиття і заломлення власні вектори $\mathbf{v}_\alpha^{(i)}$ і власні числа $s_\alpha^{(i)}$ матриці $\mathbf{M}^{(i)}$ сортуються відповідно до типу хвилі й напрямку її поширення. Для цього виконується аналіз напрямків векторів

$$\mathbf{u}_\beta(x_p, y_p, z_p, t) = \sum_{s_{1,2,3}, \omega} \frac{\omega A(\omega) B_\alpha(s_1, s_2) k_{\alpha\beta}}{S_{3\alpha}} \exp[j\omega(s_1 x_p + s_2 y_p + s_3 z_p - t)] \mathbf{a}_{pol}, \quad (8)$$

де $k_{\alpha\beta}$ – коефіцієнт відбиття або заломлення з матриці розсіювання; $S_{3\alpha}$ – вертикальна повільність хвилі типу α ; $A(\omega)$ – амплітудна характеристика сигналу джерела; $B_\alpha(s_1, s_2)$ – характеристика спрямованості джерела типу α як функція горизонтальних повільностей; $\mathbf{a}_{pol}$ – вектор поляризації хвилі типу β , знайдений у тім півпросторі, де розташований приймач.

групових швидкостей (вгору чи вниз) і знаків уявних частин фазових швидкостей.

Формування поля відбиття або заломлених хвиль типу β при збудженні коливачем джерелом типу α виконується підсумовуванням по горизонтальним повільностям s_1 , s_2 і круговим частотам ω згідно з формулою:

Чисельні приклади. Застосування Δ_k – оператора для збільшення точності розрахунку коефіцієнтів відбиття й проходження продемонструємо на прикладі періодичної пачки з 50-ма шарами, які мають потужності $h = 10$ м. Для даної моделі, шари з непарними номерами є трансверсально-ізотропним середовищем з вертикальною віссю симетрії (ВТІ), щільністю $\rho = 2000$ кг/м³, описуються швидкостями qP й qSV -хвиль $V_p = 3292$ м/с, $V_s = 1768$ м/с, параметрами Томсона $\varepsilon = 0.195$, $\delta = 0.22$ і відповідають

відкладенням аргіліту. Шари з парними номерами моделюють вугільне відкладення зі швидкостями $V_p = 1967$ м/с, $V_s = 1311$ м/с. У цих шарах присутні поглинання з добротністю $Q_p = Q_s = 10$, а також тріщинуватість із інтенсивностями $\Delta_N = 0.4$ й $\Delta_T = 0.2$, яка розташована в площинах, нахилених під кутом 45° до вертикалі. На рис. 1 зображені графіки, що обмежують області кутів α падаючої хвилі й частот f сигналу, для яких абсолютна похибка обчислення коефіцієнта заломлення (1) і коефіцієнта відбиття (2) не перевершують 10^{-3} . Розрахунок виконувався з подвійною точністю (діапазон чисел $\pm 10^{\pm 308}$ з 15-ю десятковими знаками в дробовій частині) без використання Δ_k -операторів. Відзначимо, що коефіцієнти відбиття обчислюються значно точніше. З рисунка видно, приміром, що для частоти $f = 50$ Гц і кута $\alpha = 45^\circ$ коефіцієнт заломлення без регуляризації розрахувати не можливо.

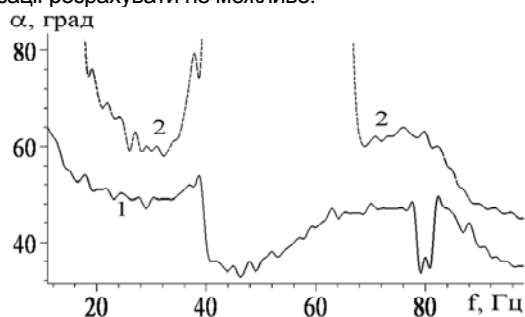


Рис. 1. Залежності граничних значень кутів від частоти на рівні погрішності 10^{-3} при розрахунку: 1 – коефіцієнтів заломлення; 2 – коефіцієнтів відбиття

Наведемо приклад розрахунку трикомпонентного хвильового поля на основі методу Хаскела-Томсона для моделі середовища з двома горизонтальними шарами і порівняємо його з полем, отриманим 2.5D-моделюванням. Шари є трансверсально-ізотропними середовищами з горизонтальними осями симетрії, параметри яких визначаються швидкостями qP й qSV -хвиль, щільностями ρ , параметрами Томсона ε , δ , γ і азимутами осей симетрії φ : $V_{p1} = 3000$ м/с, $V_{s1} = 2000$ м/с, $\rho_1 = 2200$ кг/м³, $\varepsilon_1 = 0.1$, $\delta_1 = 0.15$, $\gamma_1 = 0.2$, $\varphi_1 = 0^\circ$; $V_{p2} = 3500$ м/с, $V_{s2} = 2400$ м/с, $\rho_2 = 2300$ кг/м³, $\varepsilon_2 = 0.1$, $\delta_2 = -0.1$, $\gamma_2 = 0.2$, $\varphi_2 = 45^\circ$. Джерело має координати $(300\text{м}, 0, 0)$ і генерує сигнал Ріккера з частотою $f = 40$ Гц. Приймачі мають бічний винос $y = 200$ м і розташовані уздовж лінії, паралельної осі OX_1 від $x_{300} = 300$ м до $x_{1000} = 1000$ м. На рис. 2а зображене хвильове поле, розраховане кінцево-різницевою 2.5D-моделюванням. Моделювання по методу Хаскела-Томсона дозволило одержати роздільно відбиті qP – qP , qP – qSH , qP – qSV – хвилі, компоненти яких зображені відповідно на рис. 2б – рис. 2г. Порівняння методів моделювання 2.5D (рис. 2а) і Хаскела-Томсона (рис. 2б–рис. 2г) показує, що хвильове поле, отримане другим методом більш просте для інтерпретації й, отже, метод Хаскела-Томсона можна використати при аналізі хвильових полів у складних геологічних умовах. На рис. 2б–рис. 2г точками M_1 , M_2 , M_3 відзначені місця зміни поляризації хвилі. Зміна поляризації при моделюванні по методу Хаскела-Томсона відбувається більш різко в порівнянні з 2.5D-моделюванням.

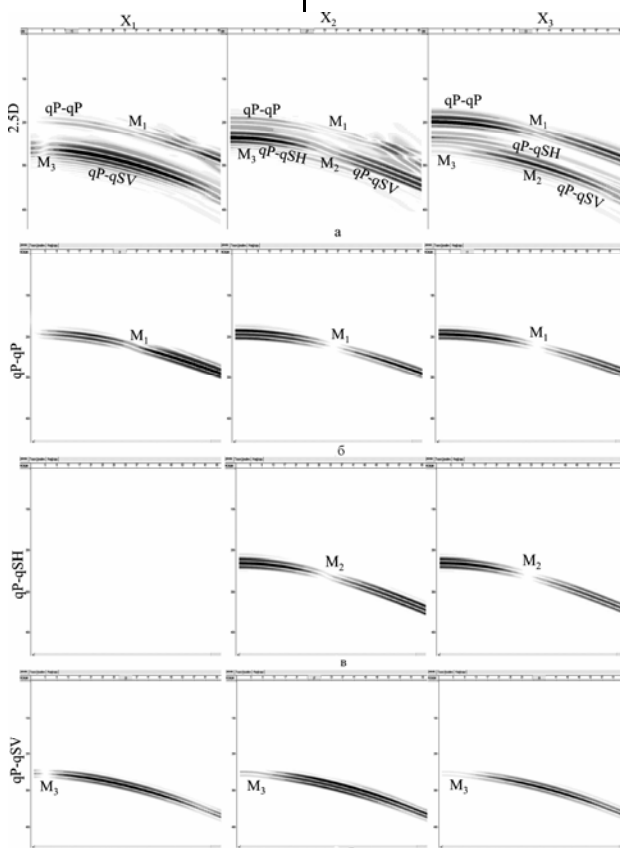


Рис. 2. Моделювання трикомпонентних полів відбитих хвиль різних типів по методу Хаскела-Томсона й порівняння їх з 2.5D-моделюванням:

(а) 2.5D-моделювання; (б) qP – qP – хвилі; (в) qP – qSH – хвилі; (г) qP – qSV – хвилі

Висновки. Таким чином, розроблено ефективний і стійкий метод формування трикомпонентних просторових полів відбитих і минаючих хвиль для горизонтально-шаруватого анізотропного середовища з поглинанням на основі обчислення матриці розсіювання. Метод дозволяє враховувати інтерференційні явища, пов'язані з тонкошаруватістю, а також одержувати хвильове поле заданого типу на прийомі. Виведено формули для коефіцієнтів відбиття й проходження в термінах матричних мінорів і узагальнений метод Δ_k -операторів для випадку анізотропного середовища при використанні шестивимірної формалізму. Застосування Δ_k -операторів

при розрахунку коефіцієнтів відбиття й проходження значно підвищило їхню точність. Результати продемонстровані на простих прикладах.

1. *Crampin S.* The dispersion of surface waves in multilayered anisotropic media // *Geophys. J. Roy. Astron. Soc.* — 1970. — V. 21, № 2. — P. 387-402.
2. *Dunkin I.W.* Computation of modal solutions in layered elastic media at high frequencies // *Bull. Seismol. Soc. Amer.* — 1965. — V. 55, № 2. — P. 335-358.
3. *Haskell N.A.* The dispersion of surface waves on multilayered media // *Bull. Seismol. Soc. Amer.* — 1953. — V. 43, № 1. — P. 17-34.
4. *Stroh A.N.* Steady state problems in anisotropic elasticity // *J. Math. Phys.* — 1962. — V. 41. — P. 77-103.
5. *Thomson W.T.* Transmission of classic waves through a stratified solid material // *J. Appl. Phys.* — 1950. — V. 21, № 1. — P. 89-93.

Надійшла до редколегії 18.10.12