

ГЕОЛОГІЧНА ІНФОРМАТИКА

УДК 550.3 (519.21)

З. Вижва, д-р фіз.-мат. наук, доц.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ

СТАТИСТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ СЕЙСМІЧНОГО ШУМУ У ТРИВИМІРНІЙ ОБЛАСТІ ЗМІННИХ ДЛЯ ВИЗНАЧЕННЯ ЧАСТОТНИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГЕОЛОГІЧНОГО СЕРЕДОВИЩА

(Рекомендовано членом редакційної колегії д-ром геол. наук, проф. М.Н. Жуковим)

Розглянуто задачу статистичного моделювання випадкових полів у тривимірній області змінних (однорідних за часом та однорідних ізотропних за просторовими координатами на площині) при впровадженні у сейсмологічні дослідження для визначення частотних характеристик геологічного середовища. Побудовано модель та сформульовано алгоритм чисельного моделювання реалізацій таких випадкових полів на основі модифікованих інтерполяційних розкладів Котельникова-Шеннона для генерування адекватних реалізацій шуму сейсмограм.

Вступ. У статті розглянуто задачу статистичного моделювання реалізацій випадкових полів з обмеженим спектром, які залежать від часу та задані на області площини, для впровадження в сейсмологічні дослідження з потребами визначення частотних характеристик геологічного середовища під будівельними майданчиками. Побудовано модель та на основі оцінок похибок середньоквадратичного наближення таких випадкових полів цією моделлю сформульовано алгоритм для чисельного моделювання реалізацій полів, адекватних реалізаціям шуму сейсмограм.

Реалізації статистичного моделювання таких випадкових полів важливо використовувати на практиці для виділення сейсмічного шуму від зовнішнього впливу і для того, щоб отримати відповідні оцінки частотних характеристик геологічного середовища області спостереження на площині. Вказані оцінки необхідно враховувати при будівництві об'єктів різного призначення з метою забезпечення надійності споруд.

Застосування розкладів одновимірних та багатовимірних детермінованих функцій в ряди Фур'є, в ряди Фур'є-Бесселя та в ряди по синк-функціям (інтерполяційні формули Котельникова-Шеннона) до просторового вивчення сил тяжіння та земного геомагнетизму, спектрального вивчення геологічної будови земної кори, дослідженню вільних коливань Землі та сфероїдальних коливань при збудженні землетрусами використовувалось вже давно [1].

Моделі та алгоритми статистичного моделювання випадкових процесів та полів на основі розкладів в ряди широко використовуються в геологічних науках порівняно недавно: [14], [11], [8], [12], [10] та ін.

В статті розглянуто приклад застосування побудованих моделей та алгоритмів статистичного моделювання випадкових процесів та полів до задачі дослідження параметрів сейсмічного шуму для потреб визначення частотних характеристик геологічного середовища під будівельними майданчиками на плоскій області спостереження.

Модель та алгоритм. При статистичному моделюванні спостережених шумів сейсмограм використовувався метод, розроблений на основі спектрального розкладу [9] та модифікованої теореми Котельникова-Шеннона для випадкових полів з обмеженим спектром, однорідних за часом та однорідних ізотропних за просторовими координатами на площині.

Вказано розклад у модифікований ряд Котельникова-Шеннона для таких випадкових полів та тримано оцінки їх середньоквадратичного наближення частковими сумами цього розкладу з використанням результатів [7] та [2].

На основі такого розкладу побудовано модель [3] гауссівського однорідного за часом та однорідного ізотропного за просторовими координатами на площині випадкового поля $\xi(t, \rho, \phi)$ на $R \times R^2$ з обмеженим спектром, зосередженим на інтервалі $[-\tilde{\omega}, \tilde{\omega}]$, у вигляді :

$$\xi_{N,M}(t,r,\varphi) = \sum_{k=-N}^N \frac{\sin \omega \left(t \frac{k\pi}{\omega} \right)}{\omega \left(t \frac{k\pi}{\omega} \right)} \left\{ \zeta_{0,1}^k(r) + \sqrt{2} \sum_{m=1}^M \left[\zeta_{m,1}^k(r) \cos m\varphi + \zeta_{m,2}^k(r) \sin m\varphi \right] \right\} \quad (1)$$

де ω – будь-яке число: $\omega > \tilde{\omega}$, $\zeta_{m,1}^k(r)$, $\zeta_{m,2}^k(r)$, $m = 0, 1, \dots, M$; $k = -\overline{N}, \overline{N}$ – послідовності гауссівських випадкових процесів, які задовольняють умовам:

$$E\zeta_{m,i}^k(r) = 0, E\zeta_{m,i}^k(r)\zeta_{n,j}^1(r) = \delta_i^j \delta_n^m \tilde{b}_m \left(\frac{(k-1)\pi}{\omega}, r \right); m, n = 0, 1, \dots, M; k, l = -\overline{N}, \overline{N}; i, j = 1, 2. \quad (2)$$

Причому, $\{\tilde{b}_m(t-s, r)\}$ – послідовність додатньо визначених ядер на $R \times R_+$, які можна обчислити за просторово-часовим спектром $\Phi(du, d\lambda)$ випадкового поля $\xi(t, r, \varphi)$ та для яких виконується така умова:

$\sum_{m=1}^{\infty} \tilde{b}_m(t-s, r) < \infty$. Вони мають наступний вигляд:

$$\tilde{b}_m(t-s, r) = \int_{|u| \leq \tilde{\omega}} \int_0^{+\infty} e^{i(t-s)u} J_m^2(r\lambda) \Phi(du, d\lambda), \quad (3)$$

де $J_m(u)$ – функція Бесселя першого роду порядку m .

Сформульовано алгоритм статистичного моделювання реалізацій гауссівських однорідних за часом та однорідних ізотропних за просторовими змінними на площині випадкових полів $\xi(t, r, \varphi)$ з обмеженням за часом t спектром.

Алгоритм

1. Вибираємо, відповідно до необхідної точності $\varepsilon > 0$, натуральні числа N та M для моделі (1) за допомогою однієї з наступних нерівностей:

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{M} \left(\frac{1}{2} r \tilde{\mu}_1 + r^2 \tilde{\mu}_2 \right) + \frac{4}{\pi^2 (2N-1)} \tilde{B}_M(0, r) < \varepsilon,$$

де r – полярний радіус, $\tilde{\mu}_k = \int_{-\tilde{\omega}}^{+\tilde{\omega}} \int_0^{+\infty} \lambda^k \Phi(du, d\lambda)$,

$$\tilde{B}_M(0, r) = \tilde{b}_0(0, r) + 2 \sum_{m=1}^M \tilde{b}_m(0, r).$$

2. Моделюємо послідовності гауссівських випадкових величин (r – фіксований полярний радіус) які задовольняють умовам (2).

3. Обчислюємо вираз (1) у заданій точці $(t, r, \varphi) \in [-T, T] \times A^2, A^2 \subset R^2$, підставляючи в нього обчислені за попередніми пунктами 1 та 2 величини N та M і послідовності значень гауссівських випадкових величин.

4. Перевіряємо згенеровану за п. 3 реалізацію випадкового поля $\xi(t, r, \varphi)$ у точках сітки в області спостереження на адекватність даним цього випадкового поля шляхом порівняння відповідних статистичних характеристик.

1. Приклад чисельного моделювання

В цьому прикладі розглянуто практичне використання розробленого алгоритму та моделі (1) для чисельного моделювання реалізацій дійснозначних однорідних за часом, однорідних ізотропних за змінними r, θ, φ на $R \times R^2$ випадкових полів $\xi(t, r, \varphi)$ з обмеженням спектром із просторово-часовою кореляційною функцією $B_z(\tau, \rho)$. При моделюванні випадкових полів із такою кореляцією можна скористатись підходом [5], який розділяє просторову та часову компоненти за правилом добутку-суми:

$$B_z(\tau, \rho) = k_1 B_x(\rho) B_t(\tau) + k_2 B_x(\rho) + k_3 B_t(\tau), \quad (4)$$

де k_1, k_2, k_3 – коефіцієнти, які можна визначити із наступних співвідношень:

$$k_1 = \frac{B_x(0) + B_t(0) - B_z(0, 0)}{B_x(0) B_t(0)},$$

$$k_2 = \frac{B_z(0, 0) - B_t(0)}{B_x(0)},$$

$$k_3 = \frac{B_z(0, 0) - B_x(0)}{B_t(0)}.$$

Просторову кореляційну функцію $B_x(\rho)$ підбірано, відповідно до побудованої просторової варіограми $\gamma_x(\rho)$, у вигляді функції типу Коші при значеннях параметрів $a=1$ та $v=1$, яка задана формулою:

$$B_x(\rho) = \left(1 + \frac{\rho^2}{a^2} \right)^{-v}, \quad v > 0, a > 0. \quad (5)$$

Графічне зображення просторової варіограми $\gamma_x(\rho)$, (емпіричної та теоретичної) для згенерованої реалізації випадкового поля $\xi(t, r, \varphi)$ за моделлю (1) при значенні часу $t=0$ на сітці точок площини $\rho \in [0.0, 0.1, \dots, 1]$, $\varphi \in \left[0, \frac{2\pi}{10}, \dots, 2\pi \right]$ наведено на рис. 2а.

Часова кореляційна функція $B_t(\tau)$ була підібрана, відповідно до побудованої часової варіограми $\gamma_t(\tau)$, у вигляді функції Бесселевого типу при значеннях параметрів $a=1$ та $v=0,55$, тобто із сімейства функцій:

$$B_t(\tau) = \Gamma(v+1) 2^v \frac{J_v(a\tau)}{(a\tau)^v}, \quad a > 0, v > 0, \quad (6)$$

де $\Gamma(x)$ – гамма-функція, а $J_v(u)$ – функція Бесселя першого роду порядку v .

Графіки просторової кореляційної функції $B_x(\rho)$ типу Коші при $a=1$ та $v=1$ та часової кореляційної функції $B_t(\tau)$ Бесселевого типу при значеннях параметрів $a=1$ та $v=0,55$ зображено на рис. 1а та 1б відповідно.

Побудовано часову варіограму $\gamma_t(\tau)$ результатів моделювання реалізації випадкового процесу $\xi(t, r, \varphi)$ за моделлю (1) у точці простору $(r, \varphi) = (0, 0)$, коли час t змінюється в межах $0 \leq t \leq T$, $T=20,01$ секунди при $\Delta t = 1/\omega = 7/N$, $\Delta t=0,01$ секунди, $\omega=100$ (N – кількість точок спостережень за часом, $N=2001$). Графічне зображення такої часової варіограми (емпіричної та теоретичної) наведено на рис. 2 б.

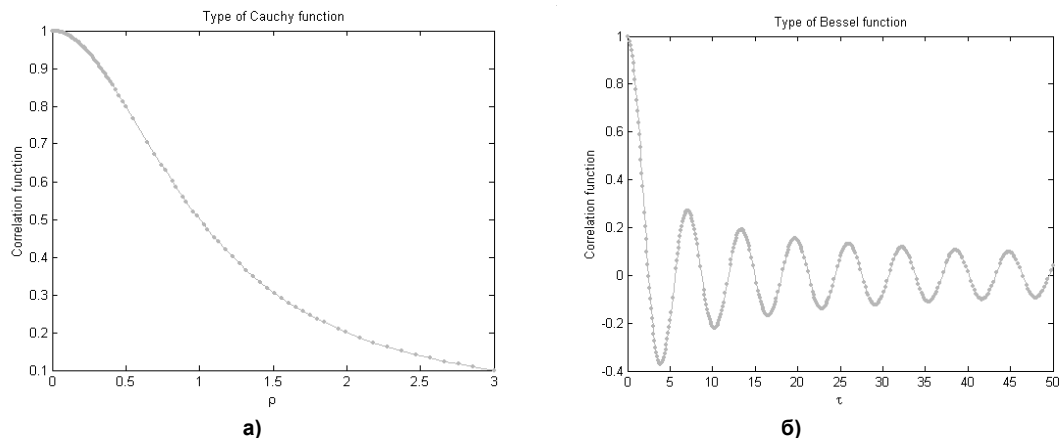


Рис. 1. Кореляційні функції:

а) просторова функція $B_x(\rho)$ типу Коші при $a = 1$ та $\nu = 1$; б) часова функція $B_t(\tau)$ бесселевого типу при $a = 1$ та $\nu = 0,55$

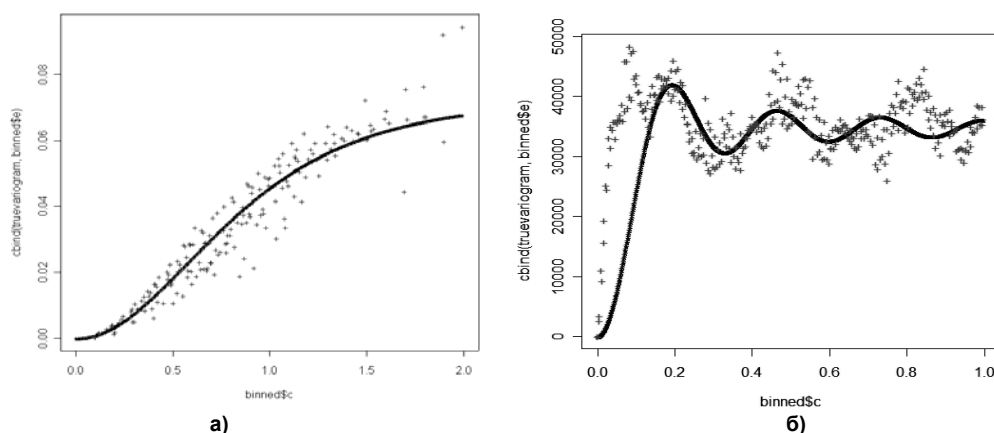


Рис. 2. Емпіричні (хрестики) та теоретичні (крива) варіограми:

а) просторова варіограма $\gamma_x(\rho)$ – для усереднення по 20 реалізаціям випадкового поля $\xi(0, r, \varphi)$ із кореляційною функцією типу Коші при $\nu = 1$; б) часова варіограма $\gamma_t(\tau)$ – для усереднення по 15 реалізаціям випадкового поля $\xi(t, 0, 0)$ із кореляційною функцією бесселевого типу при $a = 1$ та $\nu = 0,55$

Якщо для прикладу випадкового поля $\xi(t, r, \varphi)$ на $R \times R^2$ вибрати просторову кореляційну функцію $B_x(\rho)$ у вигляді формули (5) та часову кореляційну функцію $B_t(\tau)$ із сімейства функцій (6) із вказаними вище значеннями констант a та ν , то модель просторово-часової кореляційної функції $B_z(\tau, \rho)$ такого випадкового поля можна задати виразом:

$$B_z(\tau, \rho) = k_1 \times \frac{1}{1+\rho^2} 2^{0,055} \tau^{-0,055} \Gamma(1,055) J_{0,055}(\tau) + k_2 \times \frac{1}{1+\rho^2} + k_3 2^{0,055} \tau^{-0,055} \Gamma(1,055) J_{0,055}(\tau), \quad (7)$$

де коефіцієнти $k_1 = 0,433745$, $k_2 = 0,999985$, $k_3 = 0,862067$.

Для графічної інтерпретації змодельованих реалізацій випадкового поля $\xi(t, r, \varphi)$ із такою просторово-часовою кореляційною функцією $B_z(\tau, \rho)$ побудовано графік реалізації випадкового процесу $\xi(t, 0, 0)$, в точках $t_k = k \times 0,01$; $k = 1, \bar{N}$; $N = 2001$ за час спостереження t від 0 до 20 секунд (рисунк 3 а), причому r та φ – фіксовані та рівні нулю), та, з використанням програми Surfer, каркасну поверхню реалізації випадкового поля $\xi(0, r, \varphi)$ (t – фіксоване та рівне нулю) на сітці

точок площини $r \in [0,0, 0,1, \dots, 1,0]$, $\varphi \in \left[0, \frac{2\pi}{10}, \dots, 2\pi\right]$, яка зображена на рис. 3б.

Відповідна просторово-часовій кореляційній функції $B_z(\tau, \rho)$ вигляду (7) випадкового поля $\xi(t, r, \varphi)$ модель просторово-часової варіограми $\gamma_z(\rho, t)$ цього поля буде задана виразом:

$$\gamma_z(\rho, t) = (k_1 B_x(0) + k_3) \times (B_t(0) - 2^{0,055} t^{-0,055} \Gamma(1,055) J_{0,055}(t)) + (k_1 B_z(0) + k_2) \times \left(B_x(0) - \frac{1}{1+\rho^2} \right) + k_1 \left(B_x(0) - \frac{1}{1+\rho^2} \right) \times (B_t(0) - 2^{0,055} t^{-0,055} \Gamma(1,055) J_{0,055}(t)),$$

де $B_x(0) = 0,138$ – дисперсія просторових проб, $B_t(0) = 3,48 \times 10^{-5}$ – дисперсія часових проб, а коефіцієнти k_1, k_2, k_3 – ті самі, що і для просторово-часової кореляційної функції $B_z(\tau, \rho)$ у формулі (7).

Графічне зображення просторово-часової варіограми $\gamma_z(\rho, t)$ випадкового поля $\xi(t, r, \varphi)$ із просторовою кореляційною функцією $B_x(\rho)$ типу Коші при $a = 1$ та $\nu = 1$ та часовою кореляційною функцією $B_t(\tau)$ бесселевого типу наведено на наступному рис. 4 а).

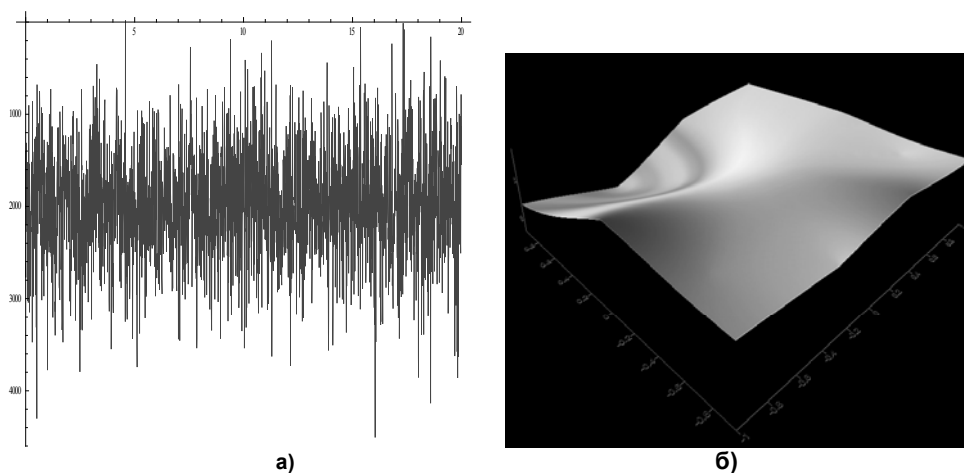


Рис. 3. Зображення: а) графіка зімітованої реалізації випадкового процесу $\xi(t, 0, 0)$, де час спостереження t – від 0 до 20 секунд; б) поверхні зімітованої реалізації поля $\xi(0, r, \varphi)$ із кореляційною функцією типу Коші при $\nu = 1$.

Спектральний аналіз виділеного та згенерованого шуму. Оцінки частотних характеристик геологічного середовища області спостереження (наприклад, під будівельними майданчиками) були отримані шляхом розрахунку та побудови графіків амплітудного та фазового спектрів шумів в сейсмограмах пунктів спостережень у такій області. Розрахунки проводилися прямим способом [1], тобто методом періодограм. Також було побудоване спектральне відношення земної кори, яке не залежить від спектра падаючих сейсмічних хвиль, а визначається виключно будовою геологічного середовища під досліджуваним пунктом.

На рис. 4б наведено побудований графік розрахованого амплітудного спектру $|S(\omega)|$ по компоненті NS – "північ-південь" для прикладу усереднених даних масивів шуму сейсмограми на пункті спостереження

BUG3 в місті Одеса. Загальний час запису інформації, з якої обиралися реалізації для аналізу, тривав близько 1,5 годин. Такий спектр відповідає з деяким допустимим наближенням теоретичному спектру випадкового процесу $\xi(t, 0, 0)$, що є звуженням випадкового поля $\xi(t, r, \varphi)$ на часову вісь (при цьому змінні r та φ – фіксовані та рівні нулю). Часова кореляційна функція $B_t(\tau)$ випадкового процесу $\xi(t, 0, 0)$ має вигляд функції Бесселя при значеннях параметрів $a = 1$ та $\nu = 0,55$ (рис. 1а) тобто:

$$B_t(\tau) = 2^{0,055} \tau^{-0,055} \Gamma(1,055) J_{0,055}(\tau)$$

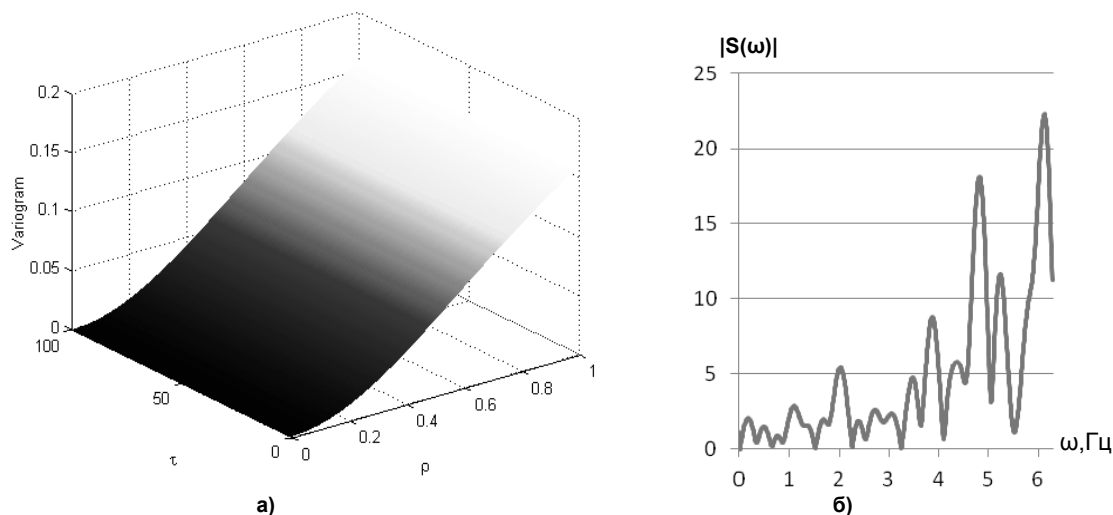


Рис. 4. а) Часово-просторова варіограма $\gamma_z(\rho, t)$ випадкового поля $\xi(t, r, \varphi)$; б) графік амплітудного спектру $|S(\omega)|$ усереднених даних масивів шуму сейсмограми $\xi(t, 0, 0)$ на компоненті NS для пункту спостереження BUG3

Висновки. Розроблено модель та алгоритм статистичного моделювання однорідних за часом, однорідних ізотропних за змінними на площині випадкових полів з обмеженим спектром, застосування яких проілюстровано на прикладі генерування реалізацій шуму сейсмограм плоскої області спостереження. Такі результати є продовженням напрямку досліджень, започаткованим у роботах [2], [3], [4] та [6] і є важливим доповненням до методів Монте-Карло, які використовуються в геології, наприклад, в [9].

Список використаних джерел

1. Бат М. Спектральный анализ в геофизике. Пер. с англ. / Бат М. – М.: Недра, 1980. – 535 с.
2. Вижева З. О. Статистичне моделювання випадкових процесів та полів. / Вижева З. О. – К.: Обрії, 2011. – 388 с.
3. Вижева З. О. Статистичне моделювання сейсмічного шуму у двовимірній області змінних для визначення частотних характеристик геологічного середовища / Вижева З. О. // Вісн Київ. ун-ту. Геологія. – 2012. – № 59. – С. 65-67.
4. Вижева З. О. Статистичне моделювання 3D випадкового поля за розкладом Котельникова-Шеннона / Вижева З. О., Федоренко К. В. // Теор. ім. та мат. стат. – 2013. – № 48 (здано до друку).

5. Демьянов В. В. Геоestatистика / Демьянов В. В., Савельева Е. А. / Под ред. Арутюняна Р.В. – М.: Наука. – 2010. – 327 с.
6. Вижва З. О. Визначення частотних характеристик геологічного середовища під будівельними майданчиками з використанням статистичного моделювання сейсмічного шуму на прикладі спостережень в м. Одесі / Кендзера О. В., Вижва З. О., Федоренко К. В., Вижва А. С. // Вісн Київ. ун-ту. Геологія. – 2012. – № 58.
7. Оленко А. Я. Порівняння оцінок помилки апроксимації в теоремі Котельникова-Шеннона / Оленко А. Я. // Вісник Київ. нац. ун-ту. – 2005. – Вип. 13. – С. 41-45.
8. Пригарин С. М. Методы численного моделирования случайных процессов и полей / Пригарин С. М. – Новосибирск: Изд-во ИВМ и МГ, 2005. – 259 с.
9. Ядренко М. И. Спектральная теория случайных полей / Ядренко М. И. – К., 1980.

10. Chiles J. P. Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty / Chiles J. P., Delfiner P. / John Wiley & Sons, Inc. New York, Toronto. – 2009. – 720 p.
11. Gneiting T. Symmetric Positive Definite Functions with Applications in Spatial Statistics / Gneiting T. / Von der Universität Bayreuth zur Erlangung des Grades eines Doktors der Naturwissenschaften (Dr. rer. nat.) genehmigte Abhandlung. – 1997. – P.107.
12. Schlather M. Introduction to Positive Definite Functions and to Unconditional Simulation of Random Fields / Schlather M. / Technical Report ST-99-10. Lancaster University, UK. – 1999.
13. Lantuejoul C. Geostatistical simulations: models and algorithm / Lantuejoul C. / – Springer, 2001. – 256 p.
14. Mantoglov A. Simulation of random fields with turning bands method / Mantoglov A., Wilson John L. // "MIT Ralph M. Parsons Lab. Hydrol. And Water Syst. Rept". – 1981. – N 264. – 199 p.

Надійшла до редколегії 29.03.13

З. Вижва, д-р физ.-мат. наук, доц.
Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

СТАТИСТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СЕЙСМИЧЕСКОГО ШУМА В ТРЕХМЕРНОЙ ОБЛАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ЧАСТОТНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ГЕОЛОГИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Рассмотрена задача статистического моделирования случайных полей в трёхмерной области переменных (однородных по времени и однородных изотропных по пространственным координатам на плоскости) при внедрении в сейсмологические исследования для определения частотных характеристик геологической среды. Построена модель и сформулирован алгоритм численного моделирования реализаций таких случайных полей на основании модифицированных интерполяционных разложений Котельникова-Шеннона для генерирования адекватных реализаций шума сейсмограмм.

Z. Vyzhva, Dr. Sci. (Phys.-Math.), Assoc. Prof.
Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

THE STATISTICAL SIMULATION OF 3-D SEISMIC NOISE FOR FREQUENCY CHARACTERISTICS OF GEOLOGY ENVIRONMENT DETERMINATION

The problem of random fields in 3D space (homogeneous in time as well as homogeneous isotropic in the plane) statistical simulation has been considered for the introducing into seismic research into frequency characteristics of geology environment. Statistical model of such random fields and numerical simulation algorithm have been developed on the basis of modified Kotelnikov-Shannon interpolation sums for generating of adequate realizations seismic noise.