

УДК 539.3+656.13

М. Лавренюк, канд. фіз.-мат. наук
Київський національний університет імені Тараса Шевченка, Київ**НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНИЙ СТАН
ВОЛОГОНАСИЧЕНОГО МАСИВУ ПІД ДІЄЮ ГРАВІТАЦІЇ**

(Рекомендовано членом редакційної колегії д-ром геол.-мінералог. наук, проф. В.В. Шевчуком)

Запропоновано загальний підхід до комп'ютерного моделювання поведінки природно-техногенних систем, зокрема прогнозування їх зсувонебезпеки, шляхом розрахунку напружено-деформованого стану зволоженого ґрунтового схилу під дією сил гравітації. Одержано визначальні співвідношення розглядуваної задачі, побудовано ітераційний метод визначення напружено-деформованого стану зсувного масиву, який дозволяє на кожному кроці розглядати плоску задачу теорії пружності. Для розв'язання пружної задачі використовується модифікований метод граничних елементів, який дозволяє одночасно визначати одразу всі компоненти напружено-деформованого стану на границі розглядуваного тіла. Запропонований метод дозволяє також для заданих навантажень та характеру зволоженості схилу визначити можливі зони пластичної течії в масиві.

Механічна поведінка вологонасиченого схилу під дією сил гравітації визначається розвитком в ній механічних напружень і виражається в виді взаємообумовлених і послідовно діючих процесів і явищ, таких як пружне і пластичне деформування масиву, та його зсув. Для оцінки реальної зсувонебезпеки масиву ґрунту необхідне математичне моделювання поведінки такого об'єкту з одержанням значень полів напружень та деформацій в масиві в широкому діапазоні граничних умов та геологічних і механічних параметрів розглядуваного середовища. Значення таких розрахунків особливо велике в районах з можливим розвитком зсувонебезпечних процесів, наприклад в Україні до таких районів відноситься Карпатський регіон.

Зазвичай, при розрахунках стійкості схилів використовують різноманітні методи – від застосування елементарних розв'язків, статистичного та експериментального підходів (стійкість відкосів в ідеально сипучих ґрунтах, стійкість вертикального відкосу в ідеально зв'язаних ґрунтах тощо) [4, 5, 8, 9] до інженерних та чисельних методів (наприклад, метод круглоциліндричних поверхонь ковзання, метод "стійкого відкосу" тощо) [2, 7].

Використання моделей механіки суцільного середовища при комп'ютерному моделюванні поведінки природно-техногенних систем [2, 3], зокрема при прогнозуванні їх зсувонебезпеки дозволяє повністю визначити напружено-деформований стан схилів та відкосів, а отже й оцінити стійкість схилу заданої крутизни чи, навпаки, визначити оптимальну крутизну схилу чи відкосу при заданому коефіцієнті запасу стійкості схилу.

З точки зору механіки суцільних середовищ задачі оцінки стійкості схилів зводяться до розгляду плоскої задачі теорії пружності (плоскої деформації).

Одним з важливих факторів, що впливає на стійкість схилу є його вологонасиченість. Розглянемо вологонасичений схил (рис. 1), пружні властивості якого залежать від консистенції породи (вологонасиченості), яка вважається заданою (аналітично чи чисельно в кожній точці розглядуваного тіла) функцією координат.

Будемо вважати, що від точки до точки змінними є модуль Юнга та коефіцієнт зволоженості розглядуваного тіла, в той час як коефіцієнт Пуассона є незмінним:

$$\nu = \nu_0 = \text{const}, \quad E = E(h), \quad h = h(x_1, x_2). \quad (1)$$

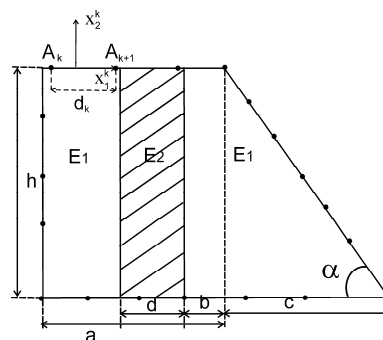


Рис. 1. Схема зсувонебезпечного вологонасиченого масиву ґрунту

Нехай E_0, ν_0 – пружні характеристики тіла в початковому, не зволоженому стані, маємо:

$$\lambda = \frac{E\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)},$$

$$\lambda_0 = \frac{E_0\nu}{(1-2\nu)(1+\nu)}, \quad \mu_0 = \frac{E_0}{2(1+\nu)}.$$

Вважаємо, що напруження та деформації в тілі пов'язані співвідношеннями наступного вигляду:

$$\sigma_{ij}(h) = \lambda(h)\delta_{ij} + 2\mu(h)ah\delta_{ij} = s_{ij} - 3K(h)ah\delta_{ij}. \quad (2)$$

де $K(h) = \frac{E(h)}{3(1-2\nu)}$, a – коефіцієнт зміни вологості, а h

– консистенція породи.

Залежність $E = E(h)$ одержується на основі експериментальних даних.

Продиференціювавши співвідношення (2), одержимо рівняння рівноваги в переміщеннях

$$\left(\lambda(h)u_{i,i}\delta_{ij} + \mu(h)(u_{i,j} + u_{j,i}) \right)_{,j} - 3(K(h)ah)_{,i} + \rho g_i = 0 \quad (3)$$

Домножимо обидві частини (3) на E_0 , одержимо:

$$E_0 \left(\lambda(h)u_{i,i}\delta_{ij} + \mu(h)(u_{i,j} + u_{j,i}) \right)_{,j} - 3E_0(K(h)ah)_{,i} + E_0\rho g_i = 0$$

Згідно (1), маємо:

$$\left(E(h) \left(\lambda_0 u_{i,j} \delta_{ij} + \mu_0 (u_{i,j} + u_{j,i}) \right) \right)_{,j} - 3E_0 (K(h)ah)_{,i} + E_0 \rho g_i = 0 \quad (4)$$

Виконуючи диференціювання (4) частинами, одержимо:

$$E(h) \left((\lambda_0 + \mu_0) u_{i,j} \delta_{ij} + \mu_0 \Delta u_i \right) + \frac{\partial E}{\partial x_j} \left(\lambda_0 u_{i,j} \delta_{ij} + \mu_0 (u_{i,j} + u_{j,i}) \right) - 3E_0 (K(h)ah)_{,i} + E_0 \rho g_i = 0 \quad (5)$$

Поділимо обидві частини (5) на $E(h)$, одержимо:

$$(\lambda_0 + \mu_0) u_{i,j} \delta_{ij} + \mu_0 \Delta u_i + \frac{1}{E(h)} \frac{\partial E}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x_j} \tilde{s}_{ij}^0 - 3 \frac{E_0}{E(h)} (K(h)ah)_{,i} + E_0 \rho g_i = 0$$

де $\tilde{s}_{ij}^0 = \lambda_0 u_{i,j} \delta_{ij} + \mu_0 (u_{i,j} + u_{j,i})$.

Далі будемо метод послідовних наближень за наступною схемою. На першому кроці маємо наступну систему рівнянь:

$$(\lambda_0 + \mu_0) u_{i,j} \delta_{ij} + \mu_0 \Delta u_i - 3E_0 \left(\frac{K(h)ah}{E(h)} \right)_{,i} = 0$$

разом з граничними умовами на вільній від навантажень границі розглядуваного тіла

$$E(h) \left(\lambda_0 u_{i,j} \delta_{ij} + \mu_0 (u_{i,j} + u_{j,i}) \right) n_j = 3K(h)ahn_i.$$

На наступному кроці до масових сил додається доданок $\frac{\partial E}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x_j} \tilde{s}_{ij}^0$, де $\tilde{s}_{ij}^0$ – напруження, визначені на попередньому кроці, а крайова задача для цього кроку запишеться у вигляді:

$$(\lambda_0 + \mu_0) u_{i,j} \delta_{ij} + \mu_0 \Delta u_i + \frac{\partial E}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x_j} \tilde{s}_{ij}^0 - 3E_0 \left(\frac{K(h)ah}{E(h)} \right)_{,i} + E_0 \rho g_i = 0 \quad (6)$$

$$E(h) \left(\lambda_0 u_{i,j} \delta_{ij} + \mu_0 (u_{i,j} + u_{j,i}) \right) n_j = 3K(h)ahn_i. \quad (7)$$

Розв'язуючи одержану систему рівнянь (6), (7) таким же чином, як і на попередньому ітераційному кроці, одержимо значення напружень в центрах елементів дискретизації $\tilde{s}_{ij}^1$. Отже, на k -му ітераційному кроці матимемо:

$$(\lambda_0 + \mu_0) u_{i,j}^{(k)} \delta_{ij} + \mu_0 \Delta u_i^{(k)} + \frac{\partial E}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x_j} \tilde{s}_{ij}^{k-1} - 3E_0 \left(\frac{K(h)ah}{E(h)} \right)_{,i} + E_0 \rho g_i = 0 \quad (8)$$

$$\left(\lambda_0 u_{i,j}^{(k)} \delta_{ij} + \mu_0 (u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}) \right) n_j = \frac{ahn_i}{(1-2\nu)}. \quad (9)$$

Одержану систему диференціальних рівнянь в частинних похідних (8), (9) зведемо до системи гранично-контактних рівнянь, скориставшись співвідношеннями Сомільяно. Остаточно одержимо наступну систему гранично-контактних рівнянь для першого ітераційного кроку:

$$\frac{1}{2} \delta_{ij} u_j^{(0)}(x) = -3 \int_{S_0} \left(\frac{E_0}{E(h)} (K(h)ah)_{,i} \right) U_i^l(x, \xi) dS_0 + \int_{S_0} \rho g_i U_i^l(x, \xi) dS_0 + \int_{\Gamma_0} U_i^l(x, \xi) \tilde{s}_{ij}^{(0)} n_j d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} g_j^l(x, \xi) u_j^{(0)}(\xi) d\Gamma_0 \quad (10)$$

$$\left(\lambda_0 u_{i,j}^{(0)} \delta_{ij} + \mu_0 (u_{i,j}^{(0)} + u_{j,i}^{(0)}) \right) n_j \Big|_{\Gamma_0} = \frac{ahn_i}{(1-2\nu)} \Big|_{\Gamma_0} \quad (11)$$

для k -го ітераційного кроку:

$$\frac{1}{2} \delta_{ij} u_j^{(k)}(x) = \int_{S_0} \frac{\partial E}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x_j} \tilde{s}_{ij}^{(k-1)} U_i^l(x, \xi) dS_0 - \int_{S_0} \frac{E_0}{E(h)} (K(h)ah)_{,i} U_i^l(x, \xi) dS_0 + \int_{\Gamma_0} U_i^l(x, \xi) \tilde{s}_{ij}^{(k)} n_j d\Gamma_0 - \int_{\Gamma_0} g_j^l(x, \xi) u_j^{(k)}(\xi) d\Gamma_0 + \int_{S_0} \rho g_i U_i^l(x, \xi) dS_0, \quad (12)$$

$$\left(\lambda_0 u_{i,j}^{(k)} \delta_{ij} + \mu_0 (u_{i,j}^{(k)} + u_{j,i}^{(k)}) \right) n_j \Big|_{\Gamma_0} = \frac{ahn_i}{(1-2\nu)} \Big|_{\Gamma_0} \quad (13)$$

Таким чином, на кожному кроці маємо задачу плоскої деформації однорідного тіла, де неоднорідність механічних властивостей тіла та вплив вологонасиченості враховані в поверхневому інтегралі в (10), (12) та в граничних умовах (11), (13).

Здійснимо дискретизацію границі розглядуваного масиву (рис. 1), вибираючи елементами дискретизації відрізки ламаних, на які заміняємо границю масиву. Введемо на цих відрізках локальну систему координат. Невідомі щільності потенціалів подвійного шару на границях включень можуть бути представлені на кожному відрізку дискретизації як функції двох змінних. На відміну від стандартного методу граничних інтегральних рівнянь таке представлення дозволяє після розв'язання системи граничних інтегральних рівнянь визначити всі компоненти переміщень та напружень на всіх границях контакту.

У випадку лінійної апроксимації компоненти переміщень на i -му відрізку дискретизації можуть бути записані наступним чином:

$$u_i^i(x') = a_{1i}x'_1 + a_{2i}x'_2 + a_{3i} \quad (14)$$

Використовуючи співвідношення Коші та реологічний закон (2) для ізотропного пружного тіла, одержимо відповідні вирази для напружень на кожному відрізку дискретизації для кожного ітераційного кроку:

$$\begin{aligned} \sigma_{11}^{i(k)}(x') &= (\lambda_0 + 2\mu_0) a_{1i}^{(k)} + \lambda_0 a_{5i}^{(k)} - 3K(h)ah \\ \sigma_{22}^{i(k)}(x') &= (\lambda_0 + 2\mu_0) a_{5i}^{(k)} + \lambda_0 a_{1i}^{(k)} - 3K(h)ah \\ \tau_{12}^{i(k)}(x') &= \mu_0 (a_{2i}^{(k)} + a_{4i}^{(k)}), \quad k=1, \dots, N_{iter}, i=1, \dots, M \end{aligned} \quad (15)$$

та s_{ij} :

$$\begin{aligned} s_{11}^{i(k)}(x') &= (\lambda_0 + 2\mu_0) a_{1i}^{(k)} + \lambda_0 a_{5i}^{(k)} \\ s_{22}^{i(k)}(x') &= (\lambda_0 + 2\mu_0) a_{5i}^{(k)} + \lambda_0 a_{1i}^{(k)} \\ s_{12}^{i(k)}(x') &= \mu_0 (a_{2i}^{(k)} + a_{4i}^{(k)}), \quad k=1, \dots, N_{iter}, i=1, \dots, M \end{aligned} \quad (16)$$

Таким чином, після підстановки в граничні інтегральні рівняння, де всі ядра підінтегральних виразів записані в локальній системі координат, а вирази для переміщень та напружень замінені на їх представлення (14)-(16) через введені невідомі в локальних координатах, та обчисливши відповідні інтеграли, одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь.

Для її замикання у випадку лінійної апроксимації складових вектора переміщень (14) додаються умови **неперервності переміщень у вузлах ламаної**:

$$\begin{aligned} (0.5a_{1i}d_i + a_{3i})\cos\alpha_i - (0.5a_{4i}d_i + a_{6i})\sin\alpha_i &= \\ = (-0.5a_{1i+1}d_{i+1} + a_{3i+1})\cos\alpha_{i+1} - (-0.5a_{4i+1}d_{i+1} + a_{6i+1})\sin\alpha_{i+1}, \\ (0.5a_{1i}d_i + a_{3i})\sin\alpha_i + (0.5a_{4i}d_i + a_{6i})\cos\alpha_i &= \\ = (-0.5a_{1i+1}d_{i+1} + a_{3i+1})\sin\alpha_{i+1} + (-0.5a_{4i+1}d_{i+1} + a_{6i+1})\cos\alpha_{i+1} \end{aligned}$$

Таким чином, після розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь для k -го кроку ітерації, знайдемо значення напружень на границі тіла. Для знаходження

значень напружень у внутрішніх точках розглядуваного тіла скористаємось формулами, одержаними із формул Сомільяно за допомогою їх диференціювання та складання з них виразів для напружень для 1-го кроку:

$$\hat{s}_{ij}^{(0)}(\xi) = \int_{\Gamma_0} u_{ijl}^*(\xi, x) p_l^{(0)}(x) d\Gamma_0(x) - \int_{\Gamma_0} p_{ijl}^*(\xi, x) u_l^{(0)}(x) d\Gamma_0 + \int_S u_{ijl}^*(\xi, x) X_l^{(0)}(x) dS_0$$

де $u_{ijk}^* = -\sigma_{ijk}^*$,

$$\begin{aligned} \sigma_{jki}^*(\xi, x) = & -\frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left[(1-2\nu)(r_i\delta_{ij} + r_j\delta_{ik} - r_i\delta_{jk}) + \beta r_{,i}r_{,j}r_{,k} \right], \\ p_{ijk}^*(\xi, x) = & \frac{G}{2\alpha\pi(1-\nu)r^\beta} \beta \frac{\partial r}{\partial n} (1-2\nu) \delta_{ij} r_{,k} + \\ & + \frac{G}{2\alpha\pi(1-\nu)r^\beta} \beta \frac{\partial r}{\partial n} \nu (\delta_{ik} r_{,j} + \delta_{ji} r_{,i}) - \frac{G}{2\alpha\pi(1-\nu)r^\beta} \beta \frac{\partial r}{\partial n} \gamma r_{,i} r_{,j} r_{,k} + \\ & + \frac{G}{2\alpha\pi(1-\nu)r^\beta} (\beta \nu (n_i r_{,j} r_{,k} + n_{,j} r_{,i} r_{,k}) - (1-4\nu) n_k \delta_{ij}) + \\ & + \frac{G}{2\alpha\pi(1-\nu)r^\beta} (1-2\nu) (\beta n_k r_{,i} r_{,j} + n_{,j} \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \\ \alpha = 1, \beta = 2, \gamma = 4, r_{,i} \equiv & \frac{\partial r}{\partial x_i}(x) = -\frac{\partial r}{\partial x_i}(\xi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X_i^{(0)}(x) = & -3 \frac{E_0}{E(h)} (K(h) a h)_{,i} = \\ & - \frac{E_0}{(1-2\nu)} \frac{\partial h}{\partial x_i} \left(\frac{a h}{E(h)} \frac{\partial E(h)}{\partial h} + a \right) \end{aligned}$$

для k -го кроку:

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_{ij}^{(k)}(\xi) = & \int_{\Gamma_0} u_{ijl}^*(\xi, x) p_l^{(k)}(x) d\Gamma_0(x) - \\ & - \int_{\Gamma_0} p_{ijl}^*(\xi, x) u_l^{(k)}(x) d\Gamma_0 + \int_S u_{ijl}^*(\xi, x) X_l^{(k)}(x) dS_0 \end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned} X_i^{(k)}(x) = & \frac{\partial E}{\partial h} \frac{\partial h}{\partial x_j} \hat{\sigma}_{ij}^{(k-1)}(x) - 3 \frac{E_0}{E(h)} (K(h) a h)_{,i} = \\ & = \hat{\sigma}_{ij}^{(k-1)} - \frac{E_0}{(1-2\nu)} \frac{\partial h}{\partial x_i} \left(\frac{a h}{E(h)} \frac{\partial E(h)}{\partial h} + a \right), \end{aligned}$$

а $\hat{\sigma}_{ij}^{(k-1)}$ – напруження з попереднього кроку.

Н. Лавренюк, канд. физ.-мат. наук

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко, Киев

НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ ВЛАГОНАСЫЩЕННОГО МАССИВА ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ГРАВИТАЦИИ

Предложено общий подход к компьютерному моделированию поведения природно-техногенных систем, в частности, прогнозирования их сдвигоопасности, посредством расчета напряженно-деформированного состояния влагонасыщенного грунтового склона под воздействием сил гравитации. Получены определяющие соотношения рассматриваемой задачи, построен итерационный метод определения напряженно-деформированного состояния оползневого массива, позволяющий на каждом шаге рассматривать плоскую задачу теории упругости. Для решения упругой задачи используется модифицированный метод граничных элементов, позволяющий одновременно определять сразу все компоненты напряженно-деформированного состояния на границе рассматриваемого тела. Предложенный метод также позволяет для заданных нагрузок и характера увлажнения склона определять возможные зоны пластического течения в массиве.

M. Lavrenyuk, Cand. Sci. (Phys.-Math.)

Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

STRESS-STRAIN STATE OF SATURATED LANDSLIDE SUBJECTED TO GRAVITATION FORCES

The general approach to computer simulation of behavior of natural and technogeneous systems, in particular forecast of its sliding safety, by calculating the stress-strain state of saturated ground slope subjected to gravitation forces is proposed. The governing relations for considered problem was obtained, and iteration method of stress-strain state assessment of landslide area, that allows to solve on every step planar elasticity problem was constructed. For solving the elastic problem the modified boundary element method is used; it allows to find simultaneously all the components of stress-strain state on the boundary of examined body. The method proposed allows for prescribed external loadings and saturation of landslide to determine possible zones of plasticity within the landslide area.

Таким чином, одержимо значення всіх компонент напружень у центрі кожного елемента дискретизації. Ітераційний процес триває доти, доки виконується умова $\max_{x \in V} \|\sigma_{ij}^{(k)} - \sigma_{ij}^{(k-1)}\| > \varepsilon$.

Після закінчення ітераційного процесу із значень σ_{ij} обчислюємо вирази для інтенсивності дотичних напружень:

$$\begin{aligned} T(h) = & \sqrt{\frac{1}{2} \hat{S}_{ij}(h) \hat{S}_{ij}(h)}, \\ \hat{S}_{ij}(h) = & \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij}, \end{aligned}$$

і порівнюємо їх в середині кожного із елементів дискретизації із значеннями $T_y(h)$. Сукупність елементів, де $T < T_y$ утворюють потенційні зони пластичності з можливим розвитком пластичних деформацій. Таким чином, підхід, запропонований в [1] та продовжений в роботах [2], [3], [6] можна поширити на задачі визначення напружено-деформованого стану вологонасичених схилів.

Список використаних джерел

1. Лавренюк В. І. Про визначення напружено-деформованого стану матриці з включенням методом граничних елементів // Вісник Київського університету. – 1993. – № 2. – С. 27–35.
2. Шевчук В.В., Іванік О.М., Лавренюк В.И., Лавренюк Н.В. Напряженно-деформированное состояние системы геологическая среда-трубопровод в условиях криолитозоны // Геофизический журнал. – 2008. – №1. – Т. 30. – С. 62-71.
3. Шевчук В.В., Іванік О.М., Горбань В.О., Лавренюк М.В. Моделирование влияния геологического окружения на функционирование транспортных природно-техногенных систем // IX Міжн. наук. конф. "Моніторинг геологічних процесів". – 2009. – К. – С. 30-34.
4. Patrick L. Barnard, Lewis A. Owen, Milap C. Sharma, Robert C. Finkel Natural and human-induced landsliding in the Garhwal Himalaya of northern India // Geomorphology. – 2001. – V. 40. – P. 21–35.
5. L. Claessens, G. B. M. Heuvelink, J. M. Schoorl and A. Veldkamp DEM resolution effects on shallow landslide hazard and soil redistribution modelling // Earth Surf. Process. Landforms. – 2005. – V. 30. – P. 461-477.
6. O. Ivanik, V. Shevchuk, M. Lavrenyuk. Numerical Modeling of Geological Environment Impact on the Pipelines // 71st EAGE Annual Conference, Earthdoc, Amsterdam, – 2009.
7. Richard M. Iverson Landslide triggering by rain infiltration // Water resources research. – 2000. – V. 36, no. 7. – P. 1897–1910.
8. David R. Montgomery, Kathleen Sullivan and Harvey M. Greenberg Regional test of a model for shallow landsliding // Hydrol. Process. – 1998. – V. 12. – P. 943-955.
9. Joshua J. Roering, James W. Kirchner, Leonard S. Sklar, William E. Dietrich Hillslope evolution by nonlinear creep and landsliding: An experimental study // Geology. – 2001. – V. 29. – no. 2. – P. 143–146.

Надійшла до редколегії 01.04.13