

УДК 550.8.056

К. Тройніч, асп.
Київський національний університет імені Тараса Шевченка
ННІ "Інститут геології", вул. Васильківська, 90, м. Київ, 03022, Україна
E-mail: k.stan@i.ua

ЗАСТОСУВАННЯ МЕТОДУ SIRT ДЛЯ ІНВЕРСІЇ ДАНИХ ГРАВІМЕТРІЇ

(Рекомендовано членом редакційної колегії д-ром геол. наук, проф. С.А. Вижвою)

У роботі запропоновано використання методу одночасної ітеративної реконструктивної томографії (SIRT) для інверсії гравіметричних даних. SIRT базується на методі Качмажа, який дозволяє ітеративним шляхом вирішувати системи лінійних алгебраїчних рівнянь виду $At = p$, де вектор відомих значень p є результатом добутку матриці коефіцієнтів A на вектор шуканих параметрів t , значення яких оцінюються з точки зору найменших квадратів нев'язки.

Вираз для гравітаційного впливу комірки моделі можна розділити на два множники, один з яких залежить від густини, а інший – від положення точки спостереження по відношенню до комірки (геометрії). Як наслідок – розв'язання прямої задачі гравірозування, з точки зору лінійної алгебри, може бути представлене через множення матриці на вектор, де вектор гравітаційних впливів є результатом множення матриці геометричних коефіцієнтів на вектор густин. Метод SIRT може бути застосований для вирішення задачі інверсії – знаходження розподілу густини за спостереженнями гравітаційним полем шляхом вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Через затухаючу природу геометричних коефіцієнтів з глибиною в результаті розв'язання задач інверсії даних гравірозування часто отримують моделі, у яких всі аномальні маси скупчені в приповерхневій частині. Для того, щоб компенсувати затухання геометричних коефіцієнтів, їх значення множаться на степеневу функцію від глибини із певним емпіричним множником у показнику функції. Такий підхід дозволяє примусово розповсюджувати аномальні маси рівномірно вздовж осі глибин.

Проведено аналіз результатів інверсії гравітаційного поля прямокутного паралелепіпеда за допомогою методу найменших квадратів, методу найменших квадратів з авторегуляризцією, методом SIRT як без, так і з компенсацією значень матриці за глибину залегання комірок. Показано, що метод SIRT може бути успішно використаний для інверсії гравітаційних даних, якщо матрицю геометричних коефіцієнтів помножити на спеціальну функцію від глибини, яка компенсує швидке затухання геометричних коефіцієнтів та протидіє скупченню аномальних мас біля поверхні.

Подальший розвиток запропонованого підходу полягає у розв'язанні задачі комплексної інверсії даних сейсморозування та гравірозування у вигляді однієї системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

Ключові слова: гравірозування, інверсія, томографія, моделювання.

Вступ. Інверсія гравіметричних даних полягає в знаходженні розподілу густини досліджуваного середовища за спостереженнями гравітаційним полем, що дозволяє оцінювати геологічну будову та речовинний склад в межах досліджуваної області. Інверсія гравіметричних даних дозволяє вирішувати велику кількість наукових та прикладних задач пов'язаних з визначенням розподілу мас в досліджуваній частині середовища. Серед них можна виділити встановлення глибинної будови Землі, вирішення задач пошуків та розвідки родовищ рудних корисних копалин, моніторинг розробки родовищ вуглеводнів тощо.

Існує велика кількість методів інверсії гравіметричних даних, огляд яких можна знайти в роботі, присвяченій розвитку гравіметричного методу [3]. Розвиток інверсії гравіметричних даних пов'язаний із такими прізвищами та дослідницькими колективами: Bott, Danes, Oldenburg, Jorgensen and Kisabeth, Nagihara and Hall, Cheng et al., Pedersen, Moraes and Hansen, Green, Last and Kubik, Guillen and Menichetti, Li and Oldenburg, Li, Zhdanov et al., Krahenbuhl and Li, Zhang et al. [2, 3]. Автор даної статті спирається на роботи Li and Oldenburg [5, 6].

У даній роботі автор пропонує застосування методу одночасної ітеративної реконструктивної томографії (SIRT), який широко використовується для інверсії даних сейсмометрії, для виконання інверсії гравітаційних даних. SIRT базується на методі Качмажа [4], який був запропонований для вирішення перевизначених систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Також значний вклад у можливість реалізації запропонованого автором методу вносить ідея [6] із введення вагових коефіцієнтів для протидії занадто швидкому згасанню гравітаційного впливу комірки моделі із глибиною.

Існуючі алгоритми інверсії гравітаційних даних орієнтовані на самостійне вирішення задачі інверсії лише гравітаційних даних. Більшість цих алгоритмів може бути використана та використовується для комплексної інверсії гравітаційних та сейсмічних даних шляхом мінімізації функціоналу нев'язки окремих систем рівнянь, як це показано в роботі [9]. Метою даної статті є створення такого алгоритму інверсії гравітаційних даних, який

дозволить поєднати сейсмічні та гравітаційні дані в одну систему рівнянь.

Дана робота написана в рамках дослідницької теми "Розробка теорії та методології побудови динамічних геолого-геофізичних моделей геологічних об'єктів і процесів", яка виконується на кафедрі геофізики Київського національного університету імені Тараса Шевченка. Вирішення поставленої в роботі задачі дозволить перейти до наступного кроку досліджень, а саме до комплексної томографічної інверсії даних сейсморозвідки та гравірозування, що дозволить вирішувати широке коло задач нафтогазової геології та глибинних досліджень Землі.

Теоретичні основи методу. До гравітаційного поля можна застосувати принцип суперпозиції, який полягає у тому, що спостережене гравітаційне поле в заданій точці є сумою гравітаційних впливів всіх існуючих мас на цю точку. Іншими словами, якщо ми маємо декілька геологічних тіл з аномальними густинами по відношенню до вмісних порід, то гравітаційний вплив цих тіл можна представити як комбінацію гравітаційних впливів кожного окремого тіла. Ця властивість гравітаційного поля є дуже корисною для вирішення прямої задачі гравірозування, оскільки геологічне середовище з тілами довільної форми з деякою похибкою можна представити у вигляді набору тіл простої геометричної форми, а гравітаційний вплив у точці O з просторовими прямокутними координатами (x_0, y_0, z_0) записати в наступному вигляді:

$$g_z = g_1 + g_2 + \dots + g_i + \dots + g_N \quad (1)$$

де g_z – сумарний гравітаційний ефект N тіл в точці $O = (x_0, y_0, z_0)$; g_i – гравітаційний ефект i -го тіла в точці O ; $i = [1, N]$.

Більшість аналітичних виразів для гравітаційного ефекту тіл простої геометричної форми із постійною густиною в межах тіла можна розділити на дві складові: густину σ та деякий геометричний фактор F , що залежить від розмірів тіла та його положення відносно точки O , в якій розраховується гравітаційний ефект від даного тіла. Покажемо це на прикладі аналітичного виразу гравітаційного поля прямокутного паралелепіпеда, грані якого співпадають з напрямками осей прямокутних координат:

$$g = \gamma \sigma \sum_{k=1}^2 \sum_{l=1}^2 \sum_{m=1}^2 \left[\mu_{klm} \left[\Delta x_k \ln(\Delta_l + R_{klm}) + \Delta y_l \ln(\Delta_k + R_{klm}) - \Delta z_m \arctan\left(\frac{\Delta x_k \Delta y_l}{\Delta z_m R_{klm}}\right) \right] \right] \quad (2)$$

де $\mu_{klm} = (-1)^k (-1)^l (-1)^m$, $\Delta x_k = x_k - x_o$, $\Delta y_l = y_l - y_o$, $\Delta z_m = z_m - z_o$, $k, l, m = [1, 2]$ – різниця координат між точкою спостережень та вершинами призм, $R_{klm} = \sqrt{\Delta x_k^2 + \Delta y_l^2 + \Delta z_m^2}$ – відстань між точкою спостереження $O = (x_o, y_o, z_o)$

Співвідношення (2) може бути переписано як

$$g = F\sigma, \quad (3)$$

де F – геометричний фактор впливу комірки на точку спостереження, σ – значення густини в цій комірці.

Таким чином (1) з урахуванням (3) може бути переписане як:

$$g_z = F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + \dots + F_i\sigma_i + \dots + F_N\sigma_N \quad (4)$$

З точки зору лінійної алгебри, співвідношення (4) є добутком вектора-рядка на вектор-стовпчик. Якщо ж необхідно розрахувати гравітаційний ефект в декількох точках простору, то таку операцію можна показати у вигляді векторного добутку матриці **A** на вектор **m**. Тобто вирішення прямої задачі гравірозвідки в матричній нотації можна представити у вигляді.

$$p = Am \quad (5)$$

Якщо елементи вектора **p** відомі, а вектора **m** – ні, то співвідношення (5) є системою лінійних алгебраїчних рівнянь виду $Am = p$, вирішуючи яку ми вирішуємо задачу інверсії даних гравірозвідки, тобто знаходимо розподіл густини за відомим значенням гравітаційного поля.

Для того, щоб не робити жодного припущення про форму аномалієутворювальних тіл частину простору, що досліджується, можна розділити на елементарні комірки, наприклад, прямокутні паралелепіпеди. Оскільки розміри прямокутних паралелепіпедів та їх положення відносно точок із спостереженням гравітаційним полем задаються як параметри моделі – можна розрахувати матрицю геометричних коефіцієнтів **F** та вирішувати задачу інверсії даних гравірозвідки, вирішуючи систему лінійних алгебраїчних рівнянь. Необхідно зазначити, що для вирішення такої задачі робиться припущення, що спостережене гравітаційне поле викликане аномальними масами лише в межах досліджуваної області.

Оскільки геофізичні спостереження містять випадкові похибки та кількість рівнянь при вирішенні оберненої задачі найчастіше не співпадає з кількістю невідомих для вирішення рівняння (5) намагаються знайти таке рішення, яке задовольнятиме всі спостереження в сенсі найменшої суми квадратів нев'язок між спостереженням та розрахованим полем. Для підвищення стабільності розв'язку використовують різні види регуляризації [8]

Серед недоліків більшості методів вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом найменших квадратів можна виділити наступні: для обчислень необхідна велика кількість обчислень та значний об'єм комп'ютерної пам'яті, неможливість вирішення задачі при сильно розріджених матрицях, неможливість задавати перше наближення тощо.

Для вирішення задачі інверсії гравіметрії автор пропонує використовувати метод SIRT, що знайшов широке застосування в обчислювальній комп'ютерній томографії та сейсмічній томографії. Перевага даного методу полягає в тому, що він дозволяє виконувати операції над рядками незалежно один від одного, що дає можливість по-перше вирішувати системи рівнянь дуже великих розмірів (адже в кожен момент часу в оперативній пам'яті комп'ютера необхідно зберігати лише один рядок матриці) та, по-друге, незалежність операцій над рядками дозволяє виконувати обчислення не послідовно, а паралельно, що значно збільшує швидкість обчислень.

У випадку сейсмічної променевої томографії оновлення швидкісної моделі відбувається на основі методу SIRT (який опосередковано використовує метод Качмажа) та обчислюється за формулою [7]:

$$\Delta m_n = \frac{1}{W_n} \sum_{w=1}^W S_{wn} \frac{\Delta p_w}{\sum_{n=1}^N S_{wn}^2}, n = 1, \dots, N \quad (6)$$

де Δw_{mn} – поправка повільності в n -й комірці для w -го променя, S_{wn} – довжина пробігу w -ї хвилі в межах n -ї комірки, Δp_w – різниця між спостереженням та обчисленим часами пробігу w -го променя; W – кількість променів, N – кількість комірок в моделі.

Автор роботи пропонує застосовувати формулу (6) для вирішення системи лінійних алгебраїчних рівнянь (5), змінивши при цьому вектор часів пробігів сейсмічних хвиль на вектор значень аномального гравітаційного поля, вектор повільностей на вектор густин та матрицю довжин пробігів хвиль на матрицю геометричних факторів.

Вагові коефіцієнти. Формулу методу SIRT можна розуміти як розподілення нев'язки між спостереженням та обчисленим значенням проекції між окремими складовими пропорційно до внеску кожної комірки моделі, через яку проходить проекція. Але на відміну від променевої сейсмічної томографії, де промені проходять тільки через незначну кількість комірок – у гравірозвідці всі комірки моделі вносять свій вклад у розраховане гравітаційне поле. Це призводить до того, що нев'язка в одній точці спостереження буде розподілятися по всім коміркам, спадуючи до значень, якими можна знехтувати при значній відстані від точки, у якій розраховується поле. Інший важливий наслідок цієї властивості гравітаційного поля описаний в серії класичній робот з інверсії гравітаційного та магнітного полів Li Oldenburg [5, 6], яка полягає в тому, що при інверсії всі аномальні маси (або магнітні маси) мають тенденцію скупчуватись у верхній частині розрізу. Для вирішення цієї проблеми було запропоновано ввести емпіричний ваговий коефіцієнт, який штучно змушує розподіляти маси по глибині. Таким чином було досягнуто цілком прийнятних результатів інверсії.

Таким чином, матрицю геометричних коефіцієнтів для розрахунку прямої задачі ми модифікуємо помноживши кожен елемент матриці на функцію $(z+z_o)^{-\beta/2}$ (параметрами β та z_o при цьому підбираються емпірично окремо для кожної моделі) [6]. В результаті досліджень автор прийшов до висновку, що співвідношення $(z/z_o)^{\beta/2}$ є більш практичним, оскільки параметр z_o можна просто задати як глибину залягання середини комірок, що входять в верхній частині моделі.

Модельний приклад. Як модельний приклад обрано класичну задачу, описану в монографії [1] – прямокутний паралелепіпед, грані якого не співпадають із гранями комірок, на які поділяється досліджувана частина простору. Як вхідні дані використовується гравітаційний ефект однорідного за аномальною густиною прямокутного паралелепіпеда, без додавання регіонального фону (чиста аномалія) та без додавання випадкових завад (ідеальні спостереження).

Для порівняння роботи алгоритму було обрано інші алгоритми вирішення систем лінійних алгебраїчних рівнянь таких як: звичайний метод найменших квадратів, метод найменших квадратів з авторегуляризцією Тихонова та Пікарда-Джонсона. Усі ці алгоритми втілені у вигляді програмного коду Рондалом Джонсом та описані у його роботі [8]. На рис. 1а наведено результати інверсії за допомогою звичайного методу найменших

квадратів. Результат інверсії незадовільний, оскільки значення комірок мають знакоперемінний характер та цілком не відповідають моделі. Метод найменших квадратів з авторегуляризациєю за Р. Джонсоном (рис. 1б) дав набагато кращі результати, де контур прямокутника простежується, але по краях моделі присутні артефакти. Метод SIRT без компенсації геометричних факторів за глибину комірки (рис. 1в) показав схожі результати до метода найменших квадратів з авторегуляризациєю. Проте контур аномалієутворювального тіла прослідковується гірше, ніж у попередньому випадку. Метод SIRT з компенсацією геометричних факторів за глибину ко-

мірки (рис. 1г) показав найкращі результати з точки зору візуального виділення контуру аномалієутворювального тіла, проте густини у приповерхневій частині моделі не відповідають дійсності. Слід зазначити, що це може бути пов'язано із тим, що в якості першого наближення для всіх тестів задавалась модель з однаковою (нульовою чи довільно вибраною від'ємною) аномальною густиною. Кращі результати можуть бути досягнуті при коректнішому першому наближенні та залученні апріорної інформації в якості обмеження (у даних прикладах не накладається жодних обмежень на можливі значення параметрів комірки).

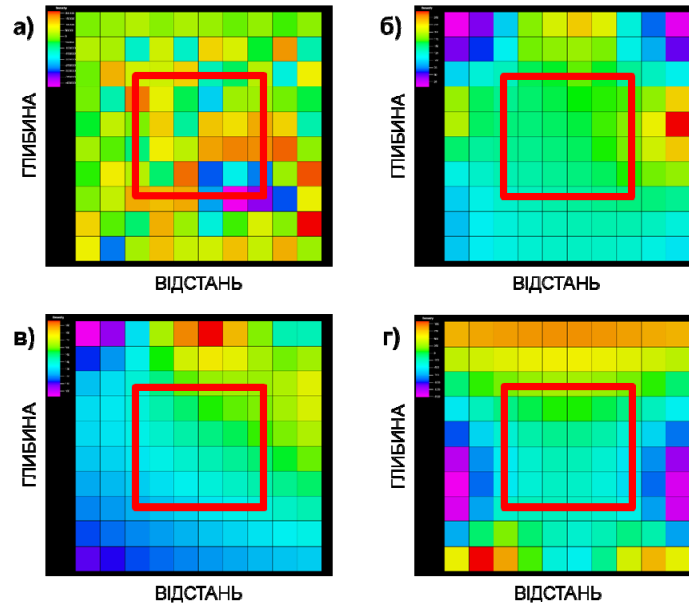


Рис. 1. Результати інверсії ідентичних вхідних даних різними методами розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь:

а – звичайний метод найменших квадратів, б – метод найменших квадратів з авторегуляризациєю за Р. Джонсоном, в – метод SIRT без компенсації геометричних факторів за глибину комірки, г – метод SIRT з компенсацією геометричних факторів за глибину комірки. Прямокутником по середині моделі зображено місце положення прямокутного паралелепіпеда однорідної густини, гравітаційний ефект якого було використано як вхідні дані

Висновки. З модельного прикладу видно, що метод SIRT цілком застосовний до інверсії гравітаційних даних. Результат інверсії залежить від вибраних вагових коефіцієнтів, першого наближення та параметрів обмеження моделі, але ці фактори не є визначальними. Також вирішальну роль грає розмір комірок: їх кількість має забезпечувати перевизначеність системи лінійних алгебраїчних рівнянь для можливості застосування методу SIRT.

Основна перевага запропонованого методу полягає не у самостійній інверсії гравіметричних даних, але у принциповій можливості об'єднання гравіметричних та сейсмометричних даних в одну систему лінійних алгебраїчних рівнянь та вирішення задачі інверсії комплексу геофізичних даних одним методом. В цьому автор бачить подальший розвиток та області застосування методу.

Список використаних джерел

1. Корбунов А. И. Теория интерпретации данных гравиметрии для сложнопостроенных сред / А. И. Корбунов. – К: УМК ВО, 1989. – 102 с.
2. Ha'az, I. Relations between the potential of the attraction of the mass contained in a finite rectangular prism and its first and second derivatives / I. Ha'az // *Intezet Geofiz. Kozlemenyek*. – 1953. – № 7. – P. 57–66.
3. Historical development of the gravity method in exploration / M. N. Nabighian, M. E. Ander, V. J. S. Grauch et al. // *Geophysics*. – 2005. – № 6. – P. 63ND–89ND.
4. Kaczmarz, S. Approximate solution of systems of linear equations / S. Kaczmarz // *International Journal of Control*. – 1993. – № 6. – P. 1269–1271.
5. Li, Y. 3-D inversion of gravity data / Y. Li, D. W. Oldenburg // *Geophysics*. – 1996. – № 1. – P. 109–119.

K. Troinich, Postgraduate Student
Institute of Geology, Taras Shevchenko National University of Kyiv

6. Li, Y. 3-D inversion of magnetic data / Y. Li, D. W. Oldenburg // *Geophysics*. – 1996. – № 7. – P. 394–408.
7. Lo, T. Fundamentals of Seismic Tomography / T. Lo, P. Inderwiessen. – SEG, Geophysical Monograph Series, 1994. – 187 p.
8. Rondall, J. E. Automatically regularized nonnegative solutions for illconditioned linear systems / J. E. Rondall // *Inverse Problems in Engineering Seminar*, Ames IA, Jul 26–27 2006. – P. 1–13.
9. Tomographic determination of velocity and depth in laterally varying media / T. N. Bishop, K. P. Bube, R. T. Cutler et al. // *Geophysics*. – 1985. – № 50(6). – P. 903–923.

References

1. Korbunov, A.I. (1989). *Teoriia interpretatsii dannykh gravimetrii dlia slozhnopostroennykh sred*. Kyiv: UMK VO. [in Russian].
2. Ha'az, I. (1953). Relations between the potential of the attraction of the mass contained in a finite rectangular prism and its first and second derivatives. *Intezet Geofiz. Kozlemenyek*, 7, 57–66.
3. Nabighian, M.N., Ander, M.E., Grauch V.J.S. et al. (2005). Historical development of the gravity method in exploration. *Geophysics*, 6, 63ND–89ND.
4. Kaczmarz, S. (1993). Approximate solution of systems of linear equations. *International Journal of Control*, 6, 1269–1271.
5. Li, Y., Oldenburg, D.W. (1996a). 3-D inversion of gravity data. *Geophysics*, 1, 109–119.
6. Li, Y., Oldenburg, D.W. (1996b). 3-D inversion of magnetic data. *Geophysics*, 7, 394–408.
7. Lo, T., Inderwiessen, P. (1994). Fundamentals of Seismic Tomography SEG. *Geophysical Monograph Series*, 187.
8. Rondall, J.E. (2006). Automatically regularized nonnegative solutions for illconditioned linear systems. In *Inverse Problems in Engineering Seminar*, Ames IA, Jul 26–27 2006. (pp. 1–13).
9. Bishop, T.N., Bube, K.P., Cutler, R.T. et al. (1985). Tomographic determination of velocity and depth in laterally varying media. *Geophysics*, 50(6), 903–923.

Надійшла до редколегії 19.08.15

90 Vasylykivska Str., Kyiv, 03022 Ukraine

ON USING SIRT METHOD FOR GRAVITY INVERSION DATA

This paper proposes to use simultaneous iterative reconstruction technique (SIRT) for the gravity data inversion. SIRT is based on Kaczmarz method and allows to solve systems of linear algebraic equations via iterative update of parameters vector. Method gives a solution which fits the observed data vector and changed its first guess in the least squares sense.

Relationship for the gravitational attraction of a cell could be split into two multipliers. First multiplier depends on density and second multiplier depends on observation point location against cell (geometrical factor). As a result gravity forward modeling could be described as multiplication of matrix by vector. A gravitational attraction vector is a multiplication of geometrical factors matrix by a densities vector. SIRT could be used for the inverse of this operation, in other words estimation of the densities vector is based on the gravitational attraction vector. From the math point of view it is a solving of a system of a linear equations.

Because of geometrical factors decay with depth inversion solution often gives a model where all anomalous masses lay in a shallow part of investigated section or volume. In order to contradict reminded decay geometrical factors should be multiplied by a special power function of depth. By doing this we force anomalous masses to be disposed even along depth axis.

Synthetic data inversion proved possibility of using SIRT for gravity data inversion. Better results could be earned using depth weighting of the geometrical factors. Further development of method could be found for the simultaneous inversion of seismic and gravity data as one system of linear equations.

Keywords: gravity method, inversion, tomography, modeling.

К. Тройнич, асп.

Киевский национальный университет имени Тараса Шевченко

УНИ "Институт геологии", ул. Васильковская, 90, г. Киев, 03022, Украина

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА SIRT ДЛЯ ИНВЕРСИИ ДАННЫХ ГРАВИМЕТРИИ

В работе предлагается использование метода одновременной итеративной реконструкционной томографии (SIRT) для инверсии гравиметрических данных. SIRT основан на методе Качмажа, который позволяет итеративным способом решать системы линейных алгебраических уравнений вида $Am = p$, где вектор известных значений p является результатом умножения матрицы A на вектор искоемых параметров m , значения которых и оцениваются.

Соотношение для гравитационного эффекта ячейки модели можно разделить на два сомножителя, один из которых зависит от плотности, а другой от положения точки наблюдения относительно ячейки (геометрии). Вследствии этого решение прямой задачи гравиразведки с точки зрения линейной алгебры можно представить в виде умножения матрицы на вектор, где вектор гравитационных эффектов является результатом произведения матрицы геометрических коэффициентов на вектор плотностей. Метод SIRT может быть использован для решения обратной задачи – нахождения распределения плотностей по наблюдаемому гравитационному полю путём решения системы линейных алгебраических уравнений.

Вследствии затухающей природы геометрических факторов с глубиной решение обратной задачи гравиразведки часто дает модели, в которых все аномальные массы сконцентрированы в приповерхностной части. Для того, чтобы компенсировать затухание геометрических коэффициентов их значения умножаются на показательную функцию глубины с определённым эмпирическим множителем в показательной части функции. Такой подход позволяет принудительно распределять аномальные массы равномерно вдоль оси глубин.

Проведен анализ результатов инверсии гравитационного поля прямоугольного параллелепипеда с использованием метода наименьших квадратов, метода наименьших квадратов с авто-регуляризацией, методом SIRT как без, так и с компенсацией значений матрицы геометрических коэффициентов за глубину положения ячеек. Показано, что метод SIRT может быть успешно использован для инверсии гравитационных данных, если матрицу геометрических коэффициентов умножить на специальную функцию глубины, которая компенсирует быстрое затухание геометрических коэффициентов и препятствует скоплению аномальных масс в приповерхностной части.

Дальнейшее развитие предложенного подхода заключается в решении задачи комплексной инверсии данных сейсморазведки и гравиразведки в виде одной системы линейных алгебраических уравнений.

Ключевые слова: гравиразведка, инверсия, томография, моделирование.